

1.2.7 2. Newtonův zákon III

Předpoklady: 010206

Pedagogická poznámka: Hodina má dvě části. V první (do příkladu 5 včetně) se řeší různé příklady, ve druhé (od příkladu 6) se procvičuje uplatňování jednoho postupu v různých situacích. Na druhou část hodiny je třeba minimálně 15 minut.

Př. 1: Člověk je schopen při roztačování automobilu vyvinout sílu 250 N. Může touto silou roztačit na vodorovné rovině osobní automobil o hmotnosti 1,6 tuny, pokud se všechny druhy tření působící proti pohybu auta dohromady rovnají 100 N? Jak dlouho by trvalo než by auto roztačil na rychlost 10 km/h? Mohl by tento člověk při působení stejných třecích sil roztačit nákladní automobil o hmotnosti 20 t?

$F_c = 250 \text{ N}$, $F_t = 100 \text{ N}$, $m_o = 1,6 \text{ t} = 1600 \text{ kg}$, $m_n = 20 \text{ t} = 20000 \text{ kg}$, $v = 10 \text{ km/h} = 2,78 \text{ m/s}$
Člověk auto roztačí, pokud bude síla, kterou auto tlačí větší než tření. V obou případech platí $F_v = F_c - F_t = 250 - 100 \text{ N} = 150 \text{ N}$.

Hmotnost auta ovlivňuje pouze velikost zrychlení: $a = \frac{F}{m}$.

Pokud bude člověk tlačít stále stejnou silou, bude se automobil pohybovat rovnoměrně

zrychleně \Rightarrow jeho rychlost je určena vztahem $v = at$ (počáteční rychlost je nulová) $\Rightarrow t = \frac{v}{a}$.

Dosadíme za zrychlení: $t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{F_v}{m}} = \frac{vm}{F_v}$

Dosazení:

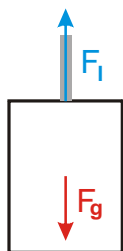
a) osobní automobil $t = \frac{vm_o}{F_v} = \frac{2,78 \cdot 1600}{150} \text{ s} = 30 \text{ s}$ (zrychlení $a = 0,94 \text{ m/s}^2$)

b) nákladní automobil $t = \frac{vm_n}{F_v} = \frac{2,78 \cdot 20000}{150} \text{ s} = 370 \text{ s} = 6,2 \text{ min}$ (zrychlení $a = 0,0075 \text{ m/s}^2$)

Pedagogická poznámka: Cílem příkladu je, aby si studenti uvědomili, že člověk může roztačit libovolně těžký předmět (samozřejmě za cenu velmi malého zrychlení), pokud se podaří dostatečně zmenšit případné třecí síly. Obecné řešení je výhodné, protože umožňuje spočítat druhé zadání pouhým dosazením.

Př. 2: Výtahová kabina o hmotnosti 400 kg je tažena výtahovým lanem o nosnosti 15 000 N. S jakým největším zrychlením a jakým směrem může být kabina tažena, aby nebylo překročeno povolené zatížení lana, které je jednou třetinou jeho nosnosti. Při jakém zrychlení by se lano přetrhlo?

$m = 400 \text{ kg}$, $F_{\text{max}} = 15000 \text{ N}$, $a = ?$



Na výtah působí dvě síly: gravitační síla F_g a síla lana F_l . Pokud je jedna z těchto sil větší než druhá, působí na výtah nenulová výslednice a výtah zrychluje. Zajímají nás velké hodnoty síly lana, tedy případy, kde bude výtah zrychlovat směrem nahoru (zrychlení způsobuje síla lana).

Vztah pro velikost zrychlení: $a = \frac{F}{m}$, kde $F = F_l - F_g$.

Překročení povoleného zatížení:

$$F_l = \frac{F_{\max}}{3} = \frac{15000}{3} \text{ N} = 5000 \text{ N}, \quad a = \frac{F_l - F_g}{m} = \frac{5000 - 4000}{400} \text{ m/s}^2 = 2,5 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Přetržení lana: } F_l = F_{\max} = 15000 \text{ N}, \quad a = \frac{F_l - F_g}{m} = \frac{15000 - 4000}{400} \text{ m/s}^2 = 27,5 \text{ m/s}^2.$$

Povolené zatížení lana výtahu by bylo překročeno, pokud by výtah zrychloval směrem vzhůru se zrychlením $2,5 \text{ m/s}^2$. Lano by se přetrhlo při zrychlení $27,5 \text{ m/s}^2$.

Př. 3: Automobil narazí v rychlosti 60 km/h do stromu. Během srážky se karosérie zdeformuje a strom do ní pronikne do hloubky 40 cm (na této dráze automobil zastaví). Urči jakou silou musí držet bezpečnostní pásy:

- a) 80 kg těžkého řidiče, b) 6 kg těžké mimino v sedačce.

$$v_0 = 60 \text{ km/h} = 16,7 \text{ m/s}, \quad s = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}, \quad m_r = 80 \text{ kg}, \quad m_d = 6 \text{ kg}, \quad F = ?$$

Při srážce bude automobil zpomalovat s obrovským zpomalením (záporným zrychlením) (ztratí velkou rychlost za velmi krátkou dobu) \Rightarrow na předměty v autě musí působit obrovská síla, která toto zpomalení způsobí (bezpečnostní pásy). Na nepřipoutané pasažéry taková síla nepůsobí a proto pokračují v pohybu rovnoměrném přímočarém přes čelní sklo mimo vůz.

Velikost síly z 2. Newtonova zákona: $a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = ma \Rightarrow$ pokud máme určit působící sílu, musíme spočítat zrychlení.

Předpokládáme rovnoměrně zpomalený pohyb s nulovou konečnou rychlostí \Rightarrow provedeme záměnu za rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí.

Rovnice: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ v obou rovnicích neznáme dvě veličiny \Rightarrow z první rovnice

$$\text{vyjádříme } t \text{ (nezajímá nás) a dosadíme do druhé: } v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}.$$

$$s = \frac{1}{2}a \left(\frac{v}{a} \right)^2 = \frac{1}{2}a \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

$$\text{Dosadíme do vztahu pro sílu: } F = ma = \frac{mv^2}{2s}.$$

Dosažení:

$$\text{a) Dospělý řidič } m_r = 80 \text{ kg: } F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{80 \cdot 16,7^2}{2 \cdot 0,4} \text{ N} = 28000 \text{ N} \text{ (síla nutná k udržení závaží o hmotnosti } 2800 \text{ kg).}$$

b) Dítě $m_d = 6 \text{ kg}$: $F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{6 \cdot 16,7^2}{2 \cdot 0,4} \text{ N} = 2100 \text{ N}$ (síla nutná k udržení závaží o hmotnosti 210 kg).

Při srážce automobilu se stromem musí bezpečnostní pásy udržet řidiče silou 28000 N, miminko v sedačce silou 2100 N.

Pedagogická poznámka: Pokud postupujete podle učebnice, neumí žáci ještě řešit rovnoměrně zrychlenou část příkladu. Předved'te to na tabuli a neztrácejte s tím mnoho času, podobné příklady jsou obsaženy v další části učebnice.

Dodatek: Pro srovnání hodnoty při nárazu v rychlosti $90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$:

a) dospělý řidič $m_r = 80 \text{ kg}$: $F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{80 \cdot 25^2}{2 \cdot 0,4} \text{ N} = 62500 \text{ N}$

b) dítě $m_d = 6 \text{ kg}$: $F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{6 \cdot 25^2}{2 \cdot 0,4} \text{ N} = 4690 \text{ N}$

Z výsledků je zřejmé, že není v lidských silách se při takovém nárazu udržet v sedačce a nepřipásaní pasažéři musí nutně pokračovat v pohybu dopředu a buď narazit na automobil nebo proletět předním sklem ven z auta.

Př. 4: Při automobilových závodech Formule 1 nejsou nádrže vozů natankované naplno a závodníci musejí během závodu zastavit v boxech, kde jim mechanici palivo doplní (často i dvakrát během jednoho dvouhodinového závodu). Tato strategie je výhodnější než natankovat na začátku plnou nádrž a během závodu netankovat. Vysvětli.

Palivo v nádrži zvětšuje hmotnost vozu a tím zmenšuje zrychlení, kterého může automobil při jízdě dosahovat (lehčí vůz je hbitější).

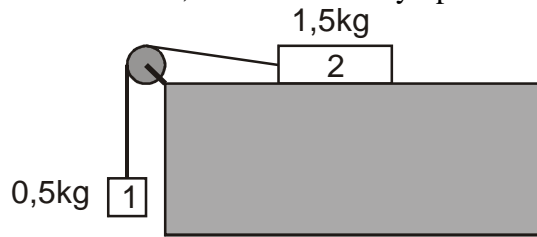
Př. 5: Navrhni způsob, jak určit hmotnost předmětů na oběžné dráze (v beztížném stavu).

Klasické váhy používané na Zemi neměří přímo hmotnost, ale gravitační sílu, kterou Země předměty přitahuje (a která je na povrchu Země přímo úměrná jejich hmotnosti).

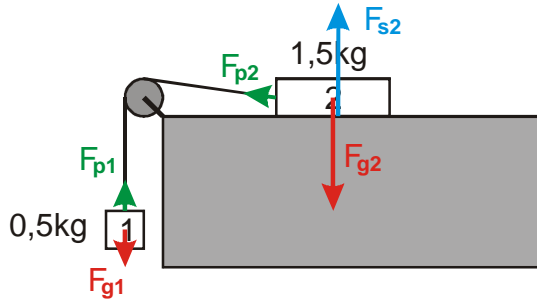
Taková váha na oběžné dráze v beztížném stavu naměří nulovou hmotnost. Předměty v beztížném stavu nejsou zdánlivě přitahovány Zemí vůbec a nemají tendenci padat k zemi (a tedy ani tlačit na váhu).

Hmotnost předmětu jako odpor vůči jeho urychlování však nezmizí \Rightarrow můžeme sestrojít „setrvačnou“ váhu, která se například snaží předmět roztočit a podle síly, která je nutná k jeho udržení na kruhové dráze, určí jeho hmotnost.

Př. 6: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Jakou silou působí provázek na každé ze závaží? Tření, hmotnost kladky i provázku zanedbej.



Nakreslíme do obrázku síly, které působí na jednotlivá závaží.

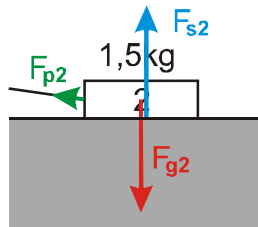


- Síly F_{g2} a F_{s2} se navzájem vyruší \Rightarrow neovlivňují urychlování soustavy (navíc působí kolmo na směr zrychlování).
- Síly F_{p1} a F_{p2} se navzájem vyruší (pouze drží soustavu pohromadě) \Rightarrow neovlivňují urychlování soustavy.

\Rightarrow Jedinou silou, která způsobuje urychlování soustavy je síla F_{g1} .

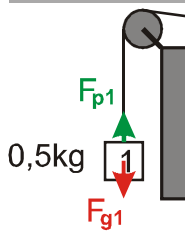
$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,5 + 1,5} \text{ m/s}^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Výpočet sil F_{p2} a F_{p1} (zkoumáme vždy pouze závaží, na které působí):



Síly F_{g2} a F_{s2} se navzájem vyruší \Rightarrow síla F_{p2} je rovna výslednici, která urychluje závaží 2 \Rightarrow

$$a = \frac{F_{p2}}{m_2} \Rightarrow F_{p2} = a m_2 = 2,5 \cdot 1,5 \text{ N} = 3,75 \text{ N}$$



Síla F_{p1} působí proti síle F_{g1} a jejich rozdíl se rovná výslednici F_{v1} , která urychluje závaží 1 \Rightarrow platí $F_{v1} = F_{g1} - F_{p1}$.

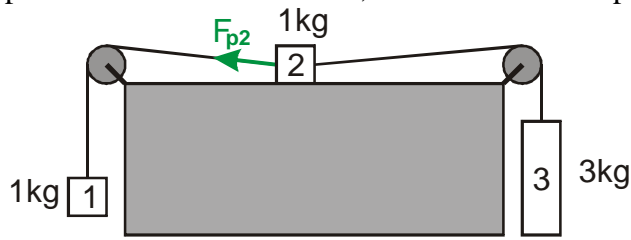
$$\Rightarrow a = \frac{F_{v1}}{m_1} \Rightarrow F_{v1} = a m_1$$

$$F_{g1} - F_{p1} = a m_1 \Rightarrow F_{p1} = F_{g1} - a m_1 = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) = 0,5 (10 - 2,5) \text{ N} = 3,75 \text{ N}$$

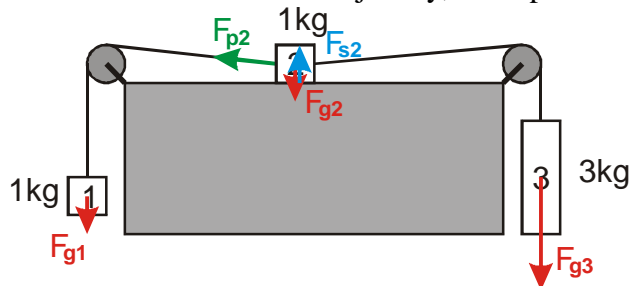
Soustava závaží na obrázku zrychluje se zrychlením $2,5 \text{ m/s}^2$, provázek působí na obě závaží silami o stejné velikosti $3,75 \text{ N}$.

Dodatek: Na dvojici sil F_{p1} a F_{p2} můžeme opět koukat jako na dvojici partnerských sil zprostředkovanou provázkem. Síla F_{p1} je silou, kterou působí závaží 2 na závaží 1, síla F_{p2} je pak silou, kterou působí závaží 1 na závaží 2.

Př. 7: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Urči vyznačenou sílu, kterou působí provázek na závaží 2. Tření, hmotnost kladek i provázku zanedbej.



Nakreslíme do obrázku vnější síly, které působí na jednotlivá závaží:



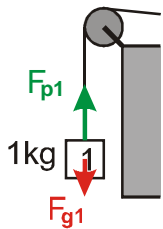
- Síly F_{g2} a F_{s2} se navzájem vruší (navíc jsou kolmé na směr zrychlování) \Rightarrow neovlivňují zrychlování soustavy.

\Rightarrow Zrychlování soustavy ovlivňují síly F_{g1} a F_{g3} .

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g3} - F_{g1}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 g - m_1 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3 \cdot 10 - 1 \cdot 10}{1 + 1 + 3} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$$

Výpočet síly F_{p2} :

Síla F_{p2} působí na závaží 2, na které působí i síla od provázku z druhé strany \Rightarrow těžký výpočet. Naštěstí je síla F_{p2} stejně velká jako síla F_{p1} \Rightarrow určíme sílu F_{p1} .



Síla F_{p1} působí proti síle F_{g1} a jejich rozdíl se rovná výslednici F_{v1} , která urychluje závaží 1. \Rightarrow Platí $F_{v1} = F_{p1} - F_{g1}$ (závaží zrychluje směrem nahoru)

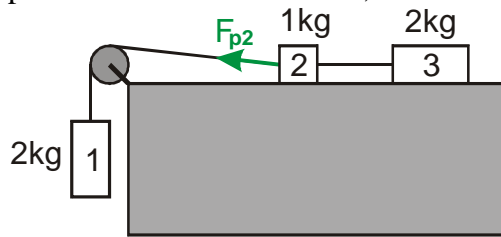
$$\Rightarrow a = \frac{F_{v1}}{m_1} \Rightarrow F_{v1} = am_1$$

$$F_{p1} - F_{g1} = am_1 \Rightarrow F_{p1} = F_{g1} + am_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a) = 1(10 + 4) \text{ N} = 14 \text{ N}$$

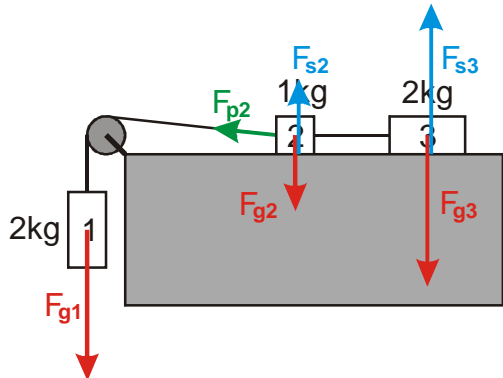
Soustava závaží na obrázku zrychluje se zrychlením 4 m/s^2 , provázek působí na závaží 2 silou o velikosti 14 N.

Pedagogická poznámka: Výpočet síly bývá pro studenty značným oříškem. Pokud je čas, nechte studenty napsat vztahy, které by umožnily výpočet jiných „provázkových“ sil.

Př. 8: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Urči vyznačenou sílu, kterou působí provázek na závaží 2. Tření, hmotnost kladek i provázku zanedbej.



Nakreslíme do obrázku vnější síly, které působí na jednotlivá závaží:



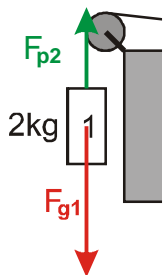
- Síly F_{g2} a F_{s2} neovlivňují urychlování soustavy.
- Síly F_{g3} a F_{s3} neovlivňují urychlování soustavy.

⇒ Jedinou silou, která způsobuje urychlování soustavy je síla F_{g1} .

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 10}{2 + 1 + 2} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$$

Výpočet síly F_{p2} :

Síla F_{p2} je stejně velká jako síla F_{p1} ⇒ určíme sílu F_{p1} .



Síla F_{p1} působí proti síle F_{g1} a jejich rozdíl se rovná výslednici F_{v1} , která urychluje závaží 1. ⇒ Platí: $F_{v1} = F_{g1} - F_{p1}$. ⇒

$$a = \frac{F_{v1}}{m_1} \Rightarrow F_{v1} = am_1$$

$$F_{g1} - F_{p1} = am_1 \Rightarrow F_{p1} = F_{g1} - am_1 = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) = 2(10 - 4) \text{ N} = 12 \text{ N}$$

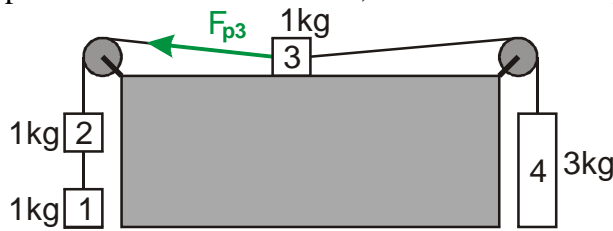
Soustava závaží na obrázku zrychluje se zrychlením 4 m/s^2 , provázek působí na závaží 2 silou o velikosti 14 N.

Dodatek: Sílu F_{p2} můžeme spočítat i přímo bez použití síly F_{p1} . Síla F_{p2} způsobuje urychlování závaží 2 a 3 ⇒ musí platit:

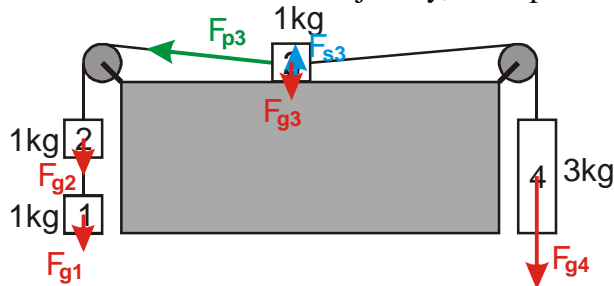
$$F_{p2} = m_2 a + m_3 a = a(m_2 + m_3) = 4(1 + 2) \text{ N} = 12 \text{ N}.$$

Fakt, že oběma způsoby jsme získali stejný výsledek, nám slouží jako částečná kontrola správnosti řešení.

Př. 9: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Urči vyznačenou sílu, kterou působí provázek na závaží 2. Tření, hmotnost kladek i provázku zanedbej.



Nakreslíme do obrázku vnější síly, které působí na jednotlivá závaží:



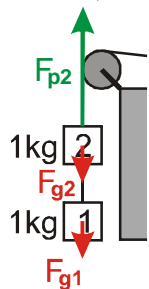
- Síly F_{g3} a F_{s3} neovlivňují urychlování soustavy.

\Rightarrow Zrychlování soustavy ovlivňují síly F_{g1} , F_{g2} a F_{g4} .

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g4} - F_{g1} - F_{g2}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{m_4 g - m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{3 \cdot 10 - 1 \cdot 10 - 1 \cdot 10}{1 + 1 + 1 + 3} \text{ m/s}^2 = 1,67 \text{ m/s}^2$$

Výpočet síly F_{p3} :

Síla F_{p3} je stejně velká jako partnerská síla $F_{p2} \Rightarrow$ určíme sílu F_{p2} (působící směrem nahoru).



Síla F_{p2} vyrovnává síly F_{g1} , F_{g2} a urychluje závaží 1 a 2 \Rightarrow platí

$$F_{p2} = F_{g1} + F_{g2} + m_1 a + m_2 a$$

$$F_{p2} = m_1 g + m_2 g + m_1 a + m_2 a = m_1 (a + g) + m_2 (a + g) = (m_1 + m_2)(a + g)$$

$$F_{p2} = (m_1 + m_2)(a + g) = (1 + 1)(10 + 1,67) \text{ N} = 23,34 \text{ N}$$

Soustava závaží na obrázku zrychluje se zrychlením $1,67 \text{ m/s}^2$, provázek působí na závaží 3 silou o velikosti $23,34 \text{ N}$.

Shrnutí: