

1.3.3 Početní příklady - rovnoměrně zrychlený pohyb II

Předpoklady: 010302

Př. 1: Osobní vlak může dosáhnout maximálního zpomalení 4m/s^2 . Urči nejvyšší rychlost, ze které ještě vlak dokáže zastavit na dráze 60 m. Příklad řeš pomoci analogického zrychleného pohybu.

Analogický zrychlený pohyb: Jaké nejvyšší rychlosti může dosáhnout vlak, který se rozjíždí se zrychlením 4m/s^2 na dráze 60 m?

$$v_0 = 0\text{ m/s}, s = 60\text{ m}, a = 4\text{m/s}^2, v = ?$$

Rovnice rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí: $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

Z první rovnice vyjádříme t a dosadíme ho do druhé: $v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} = \frac{v^2}{2a}$$

$$2as = v^2$$

$$v = \sqrt{2sa} = \sqrt{2 \cdot 60 \cdot 4}\text{ m/s} = 21,9\text{ m/s} = 78,9\text{ km/h}$$

Vlak může zastavit na dráze 60 m z rychlosti 79 km/h.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady je možné řešit analogií stejně jako příklad předchozí, nechávám volbu metody na studentech.

Př. 2: Vlak metra jedoucí rychlostí 50 km/h brzdí do úplného zastavení přibližně za 5 sekund. Jak daleko před místem zastavení musí řidič začít brzdit?

$$v_0 = 50\text{ km/h} = 13,9\text{ m/s}, t = 5\text{ s}, v = 0\text{ m/s}, s = ?$$

Vzdálenost, ve které musí řidič začít brzdit je rovna dráze, kterou urazí vlak do zastavení.

$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ neznáme zrychlení, musíme jej vyjádřit z rovnice pro rychlost:

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}$$

$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = v_0t + \frac{1}{2}\left(-\frac{v_0}{t}\right)t^2 = v_0t - \frac{1}{2}v_0t$$

$$s = \frac{1}{2}v_0t = \frac{1}{2}13,9 \cdot 5\text{ m} = 35\text{ m}$$

Řidič musí začít brzdit 35 m před místem, kde má zastavit.

Př. 3: Urči zrychlení auta, které z rychlosti 90 km/h zastaví na dráze 50 m.

$$v_0 = 90\text{ km/h} = 25\text{ m/s}, v = 0\text{ m/s}, s = 50\text{ m}, a = ?$$

Nemůžeme přímo dosadit ani do jedné z rovnic, protože v obou neznáme dvě veličiny \Rightarrow z rovnice pro rychlost vyjádříme čas a dosadíme za něj do druhé rovnice.

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$s = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2as = 2v v_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{0^2 - 25^2}{2 \cdot 50} \text{ m/s}^2 = -6,25 \text{ m/s}^2$$

Auto brzdí se zrychlením $a = -6,25 \text{ m/s}^2$

Př. 4: Řidič jedoucí rychlostí 90 km/h začal brzdit 50 m před značkou označující začátek vesnice. Jaké musí být zrychlení automobilu, aby se mu podařilo snížit rychlost na povolených 50 km/h než projede kolem značky?

$$v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}, s = 50 \text{ m}, a = ?$$

Rovnoměrně zpomalený pohyb, nenulové jsou obě rychlosti \Rightarrow musíme použít kompletní rovnice, z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme ho do druhé

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{13,9^2 - 25^2}{2 \cdot 50} \text{ m/s}^2 = -4,3 \text{ m/s}^2$$

Řidič musí brzdit se zrychlením $-4,3 \text{ m/s}^2$

Pedagogická poznámka: Je potřeba studentům sdělit, že v žádném případě není cílem, aby si pamatovali vztahy, které v následujících příkladech pro jednotlivé veličiny získají. Jediné, co by si měli pamatovat, je soustava rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Př. 5: Auto během zrychlování z 90 km/h na 130 km/h ujelo dráhu 180 m. Jak dlouho zrychlovalo? Jaké bylo jeho zrychlení? Pro obě veličiny odvoď obecné vztahy.

$$v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, v = 130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s}, s = 180 \text{ m}, t = ?, a = ?$$

Počáteční rychlost není nulová \Rightarrow musíme použít kompletní sadu rovnic a z jedné dosadit do

$$\text{druhé: } v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}.$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} \quad \text{vynásobíme rovnici výrazem } 2a$$

$$2as = 2v v_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{36,1^2 - 25^2}{2 \cdot 180} \text{ m/s}^2 \doteq 1,9 \text{ m/s}^2$$

Čas t vypočteme obecně nejjednodušeji tak, že výraz pro a dosadíme do výrazu pro t .

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{v - v_0}{\frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2s}} = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2 \cdot 180}{36,1 + 25} \text{ s} \doteq 5,9 \text{ s}$$

Auto zrychlovalo se zrychlením $1,9 \text{ m/s}^2$ přibližně po dobu 6 s .

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu si ukazujeme, že obecný výpočet nám v každém okamžiku umožňuje kontrolovat zda může být výpočet ještě správně. Žáci mají tendenci použít hodnotu zrychlení k výpočtu času. zakazují jim to, protože hlavním smyslem hodiny je obecné řešení.

Dodatek: Výhodou obecného řešení je samozřejmě také možnost provést rozměrovou zkoušku (dosazením jednotek):

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \text{výsledek může být správně.}$$

Př. 6: Bruslař po rozjetí jel rovnoměrně zpomaleným pohybem 15 s než narazil rychlostí 1 m/s do svého kamaráda. Jaká byla jeho počáteční rychlost pokud rovnoměrně zpomaleným pohybem ujel 45 m ?

$$v = 1 \text{ m/s}, s = 45 \text{ m}, t = 15, v_0 = ?$$

Počáteční rychlost není nulová \Rightarrow musíme použít kompletní sadu rovnic. Nezajímá nás zrychlení \Rightarrow vyjádříme ho z první rovnice a dosadíme do druhé: $v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at$

$$\Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{t} t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} (v - v_0) t$$

$$2s = 2v_0 t + vt - v_0 t$$

$$2s = v_0 t + vt$$

$$2s - vt = v_0 t$$

$$v_0 = \frac{2s - vt}{t} = \frac{2s}{t} - v = \frac{2 \cdot 45}{15} - 1 \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Bruslař se pohyboval počáteční rychlostí 5 m/s.

Př. 7: Pokud řidič sundá nohu z plynu, zpomalí automobil na rovině o 10 km/h během 4 sekund. Jak daleko před vesnicí musí na rovné silnici řidič sundat nohu z plynu, aby ušetřil palivo tím, že během samovolného zpomalování z 90 km/h přesně na 50 km/h nebude auto spotřebovávat žádné palivo?

$$\Delta t = 4 \text{ s}, \Delta v = 10 \text{ km/h} = 2,78 \text{ m/s}, v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}, s = ?$$

Auto se během dojíždění k vesnici pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem. Velikost zpomalení tohoto pohybu je zadaná (ale trochu skrytě). Počáteční i koncová rychlost jsou nenulové \Rightarrow musíme použít kompletní soustavu rovnic. Čas nás nezajímá \Rightarrow vyjádříme si ho

$$\text{z první rovnice a dosadíme do druhé: } v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}.$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2v v_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\text{Výpočet zrychlení: } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2,78}{4} \text{ m/s}^2 = -0,70 \text{ m/s}^2.$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{13,9^2 - 25^2}{2 \cdot (-0,7)} \text{ m} = 308 \text{ m}$$

Auto musí začít zpomalovat 308 m před vesnicí.

Shrnutí: Obecné řešení umožňuje lepší kontrolu správnosti řešení.