1.3.9 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici II

Předpoklady: 010309

Př. 1: Rovnoměrně zrychlený pohyb je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny *a*, *v*, *s*: $a = \text{konstanta}$, $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Najdi analogickou trojici rovnic pro úhlové veličiny ε, ω, φ, pokud popisují rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici.

- Rovnice pro ε: rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici $\Rightarrow$ úhlové zrychlení se nemění $\Rightarrow$ $\varepsilon = \text{konstanta}$.
- Rovnice pro ω: zaměníme veličiny v rovnici $v = v_0 + at$ za jejich úhlové analogie $\Rightarrow$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (logické, úhlová rychlost se rovná původní úhlové rychlost a přírůstku způsobenému úhlovým zrychlením).
- Rovnice pro φ: zaměníme veličiny v rovnici $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ za jejich úhlové analogie $\Rightarrow$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ (opět logické, konečný úhel se skládá ze tří částí, počáteční hodnoty úhlu, přírůstku způsobeného počáteční úhlovou rychlostí a přírůstku způsobeného úhlovým zrychlením).

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby všichni žáci sestavili rovnice sami, podle jejich vzorů pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Jde o to, aby si vybudovali analogii normálních a úhlových veličin a nesnažili se zbytečně pamatovat dvě sady rovnic. Upozornění se možná zdá zbytečné, ale je faktem, že žáci to nedělají a často si toho ani nevšimnou.

Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny ε, ω, φ:

- $\varepsilon = \text{konstanta}$
- $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
- $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

Př. 2: Harddisk otáčející se rychlostí 7200 ot/min se po vypnutí zastaví za 8 s. Jaké je jeho úhlové zrychlení? Kolik otáček ještě vykoná?

$\Delta t = 8\,\text{s}$, $\omega = 0\,\text{rad/s}$, $\omega_0 = 7200\,\text{ot/min} = 120\,\text{ot/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s}$, $\varepsilon = ?$, $n = ?$
Pro výpočet úhlového zrychlení použijeme rovnici pro úhlovou rychlost. Známe v ní všechny veličiny kromě úhlového zrychlení.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 754}{8}\,\text{rad/s}^2 = -94{,}25\,\text{rad/s}^2$$

Ze zadaných veličin můžeme určit úhel otočení. Pokud tento úhel vydělíme 2π (velikost jedné otáčky v radiánech), získáme počet otáček.

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = 0 + 754 \cdot 8 + \frac{1}{2}(-94,25)8^2 \text{ rad} = 3016 \text{ rad}$

$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3016}{2\pi} = 480$

Harddisk se zastavuje s úhlovým zrychlením $-94,25 \text{ rad/s}^2$ a před zastavením udělá ještě 480 otáček.

Kompletní přehled analogie normálních a úhlových veličin u kruhového pohybu:

posuvný pohyb	**pojítko**	**pohyb po kružnici**
dráha s $[\text{m}]$	$s = \varphi r$	úhel $\varphi[\text{rad}]$
rychlost v $[\text{m/s}]$ $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \omega r$	úhlová rychlost $[\text{rad/s}]$ $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
zrychlení v $[\text{m/s}^2]$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_t = \varepsilon r$	úhlové zrychlení $[\text{rad/s}^2]$ $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
		úhlové veličiny související s opakováním (bez analogií u posuvného pohybu)
		perioda $T[\text{s}] \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$
		frekvence $f = \frac{1}{T}[\text{Hz}]$ $\Rightarrow \omega = 2\pi f$

rovnoměrný posuvný pohyb	**rovnoměrný pohyb po kružnici**
$v =$ konstanta	$\omega =$ konstanta
$s = s_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$

rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb	**rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici**
$a =$ konstanta	$\varepsilon =$ konstanta
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

$\Rightarrow$ Při řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici postupujeme obdobně jako při řešení příkladů pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Dodatek: Situace mezi zrychlením a úhlovým zrychlením je trochu složitější, proto je zrychlení u pojítka značeno indexem a_t. Více si řekneme v příští hodině.

Př. 3: Setrvačníkové kolo, které se otáčí 500 krát za minutu, bylo po dobu 15 sekund urychlováno s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 5\,\mathrm{rad/s^2}$. Jaký počet otáček za minutu dosáhne?

$f_0 = 500\,\mathrm{ot/\,min} = 500\,\mathrm{ot/60\,s} = \frac{50}{6}\,\mathrm{ot/s} = \frac{50}{6}\,\mathrm{Hz}$, $\varepsilon = 5\,\mathrm{rad/s^2}$, $t = 15\,\mathrm{s}$, $f = ?$

Kolo se pohybuje rovnoměrně zrychleným kruhovým pohybem. Počáteční frekvenci musíme přepočítat na úhlovou rychlost. Spočteme konečnou úhlovou rychlost a z ní konečnou frekvenci.

a) výpočet počáteční úhlové rychlosti

$$\omega_o = 2\pi f_0 = 2\cdot 3{,}14\cdot\frac{50}{6} = 52{,}4\,\mathrm{rad/s}$$

b) výpočet konečné úhlové rychlosti

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t$$

$$\omega = 52{,}4 + 5\cdot 15 = 52{,}4 + 75 = 127{,}4\,\mathrm{rad/s}$$

c) výpočet konečné frekvence

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}\,\mathrm{Hz}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{127{,}4}{2\pi}\,\mathrm{Hz} = 20{,}27\,\mathrm{Hz} = 1217\,\mathrm{ot/min}$$

Setrvačníkové kolo dosáhne úhlové rychlosti 1217 ot/min.

Dodatek: Příklad by šel počítat i přímým odvozením vztahu pro konečnou frekvenci:

$\omega = \omega_o + \varepsilon t$ dosadíme $\omega_o = 2\pi f_0$ a $\omega = 2\pi f$

$$2\pi f = 2\pi f_0 + \varepsilon t \quad /:2\pi$$

$$f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi}t$$

Dosazení: $f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi}t = \frac{50}{6} + \frac{5}{2\pi}5\,\mathrm{Hz} = 20{,}27\,\mathrm{Hz}$.

Vztah nápadně připomíná vztah pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici $\omega = \omega_o + \varepsilon t$, kde místo úhlového zrychlení ε v $\mathrm{rad/s^2}$ vystupuje výraz $\frac{\varepsilon}{2\pi}$, což není nic jiného než úhlové zrychlení v jednotkách $\mathrm{ot/s^2}$ (dělením výrazem 2π, převádíme z radiánů na otáčky). Po zamyšlení je to samozřejmé, protože frekvence je úhlová rychlost v jednotkách $\mathrm{ot/s^2}$ a musí pro ni platit i rovnice pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu.

Př. 4: Automobil zrychlí za 12 s z 0 km/h na 100 km/h. Urči úhlové zrychlení, se kterým se točí jeho kola. Průměr kol je 40 cm. O jaký úhel se během zrychlování kola otočila? Kolikrát se kola otočila?

$t = 12\,\mathrm{s}$, $v_0 = 0\,\mathrm{km/h}$, $v = 100\,\mathrm{km/h} = 27{,}8\,\mathrm{m/s}$, $d = 40\,\mathrm{cm} \Rightarrow r = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\varepsilon = ?$, $\varphi = ?$, $n = ?$

Přejdeme z přímočarého do kruhového pohybu: $v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{27{,}8}{0{,}2}\,\mathrm{rad/s} = 139\,\mathrm{rad/s}$.

Auto na počátku pohybu stojí $\Rightarrow$ kola se netočí (úhlová rychlost je nulová) $\Rightarrow$ použijeme jednodušší rovnice s nulovou počáteční rychlostí $\omega = \varepsilon t$, $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$.

$$\omega = \varepsilon t \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{139}{12}\,\text{rad/s}^2 = 11{,}6\,\text{rad/s}^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega t = \frac{139\cdot 12}{2}\,\text{rad} = 834\,\text{rad}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{834}{2\pi} = 133$$

Kola automobilu se točila s úhlovým zrychlením $11{,}6\,\text{rad/s}^2$ a během rozjíždění se otočila o 834 rad (133 otáček).

Př. 5: Rotor elektromotoru (poloměr 12 cm) se po vypnutí zastavil za 15 s, přičemž vykonal ještě 54 celých otáček. Urči:
a) počáteční úhlovou a obvodovou rychlost
b) úhlové zrychlení
c) tečné zrychlení na obvodu
d) počáteční frekvenci

$t = 15\,\text{s}$, $n = 54$, $r = 12\,\text{cm} = 0{,}12\ \text{m}$, $f_0 = ?$, $\varepsilon = ?$, $a_t = ?$, $v_0 = ?$, $\omega_0 = ?$

Rotor se po vypnutí pohyboval rovnoměrně zpomaleným pohybem.

a) určení počáteční úhlové a obvodové rychlosti

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Úhel otočení můžeme snadno určit z počtu vykonaných otáček $\Rightarrow$ v obou rovnicích neznáme dvě veličiny $\Rightarrow$ musíme z jedné rovnice dosadit do druhé.

$$\omega = 0 = \omega_0 + \varepsilon t \;\Rightarrow\; \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$$

Dosadíme do první rovnice: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{t}\right)t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 t = \frac{1}{2}\omega_0 t$.

Dosadíme vztah mezi úhlem a počtem otáček $n = \frac{\varphi}{2\pi} \;\Rightarrow\; \varphi = 2\pi n$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega_0 t = 2\pi n$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15}\,\text{rad/s} = 45{,}2\,\text{rad/s}$$

$$v_0 = \omega_0 r = 45{,}2\cdot 0{,}12\,\text{m/s} = 5{,}43\,\text{m/s}$$

b) určení úhlového zrychlení

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\frac{4\pi n}{t}}{t} = -\frac{4\pi n}{t^2} = -\frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15^2}\,\text{rad/s}^2 = 3{,}02\,\text{rad/s}^2$$

c) určení tečného zrychlení

$$a_t = r\cdot\varepsilon = 0{,}12\cdot 3{,}02\,\text{m/s}^2 = 0{,}362\,\text{m/s}^2$$

d) určení počáteční frekvence

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\frac{4\pi n}{t} = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{2n}{t} = \frac{2\cdot 54}{15}\,\text{Hz} = 7{,}2\,\text{Hz}$$

Př. 6: Setrvačné kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením $2\,\text{rad/s}^2$ a otočí se za dobu $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ s o úhel 75 rad. Jak dlouho se již roztáčelo před měřenými pěti sekundami?

$\varepsilon = 2\,\text{rad/s}^2$, $\Delta t = 5\,\text{s}$, $\Delta\varphi = 75\,\text{rad}$, $\omega_0 = 0\,\text{rad/s}$, $t = ?$

Úhel otočení od počátku roztáčení do času t_1: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2$.

Úhel otočení od počátku roztáčení do času t_2: $\varphi_2 = \frac{1}{2}\varepsilon t_2^2$.

Dosadíme: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right)$

Chceme spočítat t_1. Vyjádříme tedy t_2 pomocí Δt: $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Dosadíme: $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\left(t_1 + \Delta t\right)^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2\right)$.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon 2t_1\Delta t + \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$\varepsilon t_1\Delta t = \Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t}$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t} = \frac{75 - \frac{1}{2}2\cdot 5^2}{2\cdot 5} = 5\,\text{s}$$

Setrvačné kolo se před měřenými 5 sekundami otáčelo 5 sekund.

Shrnutí: Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je analogií rovnoměrně zrychleného pohybu.