

### 1.3.9 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici II

**Předpoklady:** 010309

**Př. 1:** Rovnoměrně zrychlený pohyb je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny  $a$ ,  $v$ ,  $s$ :  
 $a = \text{konstanta}$ ,  $v = v_0 + at$ ,  $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ . Najdi analogickou trojici rovnic pro úhlové veličiny  $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ , pokud popisují rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici.

- Rovnice pro  $\varepsilon$ : rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici  $\Rightarrow$  úhlové zrychlení se nemění  $\Rightarrow \varepsilon = \text{konstanta}$ .
- Rovnice pro  $\omega$ : zaměníme veličiny v rovnici  $v = v_0 + at$  za jejich úhlové analogie  $\Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t$  (logické, úhlová rychlost se rovná původní úhlové rychlosti a přírůstku způsobenému úhlovým zrychlením).
- Rovnice pro  $\varphi$ : zaměníme veličiny v rovnici  $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$  za jejich úhlové analogie  $\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$  (opět logické, konečný úhel se skládá ze tří částí, počáteční hodnoty úhlu, přírůstku způsobeného počáteční úhlovou rychlostí a přírůstku způsobeného úhlovým zrychlením).

**Pedagogická poznámka:** Snažím se, aby všichni žáci sestavili rovnice sami, podle jejich vzorů pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Jde o to, aby si vybuodovali analogii normálních a úhlových veličin a nesnažili se zbytečně pamatovat dvě sady rovnic. Upozornění se možná zdá zbytečné, ale je faktem, že žáci to nedělají a často si toho ani nevšimnou.

Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny  $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ :

- $\varepsilon = \text{konstanta}$
- $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
- $\varphi = \varphi_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

**Př. 2:** Harddisk otáčející se rychlostí 7200 ot/min se po vypnutí zastaví za 8 s. Jaké je jeho úhlové zrychlení? Kolik otáček ještě vykoná?

$$\Delta t = 8 \text{ s}, \omega = 0 \text{ rad/s}, \omega_0 = 7200 \text{ ot/min} = 120 \text{ ot/s} = 240\pi \text{ rad/s} = 754 \text{ rad/s}, \varepsilon = ?, n = ?$$

Pro výpočet úhlového zrychlení použijeme rovnici pro úhlovou rychlost. Známe v ní všechny veličiny kromě úhlového zrychlení.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 754}{8} \text{ rad/s}^2 = -94,25 \text{ rad/s}^2$$

Ze zadaných veličin můžeme určit úhel otočení. Pokud tento úhel vydělíme  $2\pi$  (velikost jedné otáčky v radiánech), získáme počet otáček.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = 0 + 754 \cdot 8 + \frac{1}{2} (-94,25) 8^2 \text{ rad} = 3016 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3016}{2\pi} = 480$$

Harddisk se zastavuje s úhlovým zrychlením  $-94,25 \text{ rad/s}^2$  a před zastavením udělá ještě 480 otáček.

Kompletní přehled analogie normálních a úhlových veličin u kruhového pohybu:

<b>posuvný pohyb</b>	<b>pojítka</b>	<b>pohyb po kružnici</b>
dráha $s$ [m]	$s = \varphi r$	úhel $\varphi$ [rad]
rychlost $v$ [m/s] $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \omega r$	úhlová rychlost [rad/s] $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
zrychlení $a$ [m/s <sup>2</sup> ] $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_t = \varepsilon r$	úhlové zrychlení [rad/s <sup>2</sup> ] $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
		<b>úhlové veličiny související s opakováním</b> (bez analogií u posuvného pohybu)
		perioda $T$ [s] $\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$
		frekvence $f = \frac{1}{T}$ [Hz] $\Rightarrow \omega = 2\pi f$

<b>rovnoměrný posuvný pohyb</b>	<b>rovnoměrný pohyb po kružnici</b>
$v = \text{konstanta}$	$\omega = \text{konstanta}$
$s = s_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$

<b>rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb</b>	<b>rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici</b>
$a = \text{konstanta}$	$\varepsilon = \text{konstanta}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$

$\Rightarrow$  Při řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici postupujeme obdobně jako při řešení příkladů pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

**Dodatek:** Situace mezi zrychlením a úhlovým zrychlením je trochu složitější, proto je zrychlení u pojítka značeno indexem  $a_t$ . Více si řekneme v příští hodině.

**Př. 3:** Setrvačnickové kolo, které se otáčí 500 krát za minutu, bylo po dobu 15 sekund urychlováno s úhlovým zrychlením  $\varepsilon = 5 \text{ rad/s}^2$ . Jaký počet otáček za minutu dosáhne?

$$f_0 = 500 \text{ ot/min} = 500 \text{ ot}/60 \text{ s} = \frac{50}{6} \text{ ot/s} = \frac{50}{6} \text{ Hz}, \quad \varepsilon = 5 \text{ rad/s}^2, \quad t = 15 \text{ s}, \quad f = ?$$

Kolo se pohybuje rovnoměrně zrychleným kruhovým pohybem. Počáteční frekvenci musíme přepočítat na úhlovou rychlost. Spočteme konečnou úhlovou rychlost a z ní konečnou frekvenci.

a) výpočet počáteční úhlové rychlosti

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{50}{6} = 52,4 \text{ rad/s}$$

b) výpočet konečné úhlové rychlosti

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\omega = 52,4 + 5 \cdot 15 = 52,4 + 75 = 127,4 \text{ rad/s}$$

c) výpočet konečné frekvence

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{127,4}{2\pi} \text{ Hz} = 20,27 \text{ Hz} = 1217 \text{ ot/min}$$

Setrvačnickové kolo dosáhne úhlové rychlosti 1217 ot/min.

**Dodatek:** Příklad by šel počítat i přímým odvozením vztahu pro konečnou frekvenci:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{dosadíme } \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ a } \omega = 2\pi f$$

$$2\pi f = 2\pi f_0 + \varepsilon t \quad /: 2\pi$$

$$f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi} t$$

$$\text{Dosazení: } f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi} t = \frac{50}{6} + \frac{5}{2\pi} \cdot 15 \text{ Hz} = 20,27 \text{ Hz}.$$

Vztah nápadně připomíná vztah pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ , kde místo úhlového zrychlení  $\varepsilon$  v  $\text{rad/s}^2$

vystupuje výraz  $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ , což není nic jiného než úhlové zrychlení v jednotkách  $\text{ot/s}^2$

(dělením výrazem  $2\pi$ , převádíme z radiánů na otáčky). Po zamyšlení je to samozřejmé, protože frekvence je úhlová rychlost v jednotkách  $\text{ot/s}^2$  a musí pro ni platit i rovnice pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu.

**Př. 4:** Automobil zrychlí za 12 s z 0 km/h na 100 km/h. Urči úhlové zrychlení, se kterým se točí jeho kola. Průměr kol je 40 cm. O jaký úhel se během zrychlování kola otočila? Kolikrát se kola otočila?

$$t = 12 \text{ s}, \quad v_0 = 0 \text{ km/h}, \quad v = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}, \quad d = 40 \text{ cm} \Rightarrow r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}, \quad \varepsilon = ?, \quad \varphi = ?, \quad n = ?$$

Přejdeme z přímočarého do kruhového pohybu:  $v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{27,8}{0,2} \text{ rad/s} = 139 \text{ rad/s}.$

Auto na počátku pohybu stojí  $\Rightarrow$  kola se netočí (úhlová rychlost je nulová)  $\Rightarrow$  použijeme jednodušší rovnice s nulovou počáteční rychlostí  $\omega = \varepsilon t$ ,  $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ .

$$\omega = \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{139}{12} \text{ rad/s}^2 = 11,6 \text{ rad/s}^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{t} t^2 = \frac{1}{2} \omega t = \frac{139 \cdot 12}{2} \text{ rad} = 834 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{834}{2\pi} = 133$$

Kola automobilu se točila s úhlovým zrychlením  $11,6 \text{ rad/s}^2$  a během rozjíždění se otočila o  $834 \text{ rad}$  (133 otáček).

**Př. 5:** Rotor elektromotoru (poloměr  $12 \text{ cm}$ ) se po vypnutí zastavil za  $15 \text{ s}$ , přičemž vykonal ještě  $54$  celých otáček. Urči:

- |   |                        |
|---|------------------------|
| a) počáteční úhlovou a obvodovou rychlost | b) úhlové zrychlení    |
| c) tečné zrychlení na obvodu              | d) počáteční frekvenci |

$$t = 15 \text{ s}, n = 54, r = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}, f_0 = ?, \varepsilon = ?, a_t = ?, v_0 = ?, \omega_0 = ?$$

Rotor se po vypnutí pohyboval rovnoměrně zpomaleným pohybem.

**a) určení počáteční úhlové a obvodové rychlosti**

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici:  $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ ,  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ .

Úhel otočení můžeme snadno určit z počtu vykonaných otáček  $\Rightarrow$  v obou rovnicích neznáme dvě veličiny  $\Rightarrow$  musíme z jedné rovnice dosadit do druhé.

$$\omega = 0 = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$$

$$\text{Dosadíme do první rovnice: } \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_0}{t} \right) t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2} \omega_0 t = \frac{1}{2} \omega_0 t.$$

$$\text{Dosadíme vztah mezi úhlem a počtem otáček } n = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \varphi = 2\pi n.$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega_0 t = 2\pi n$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 54}{15} \text{ rad/s} = 45,2 \text{ rad/s}$$

$$v_0 = \omega_0 r = 45,2 \cdot 0,12 \text{ m/s} = 5,43 \text{ m/s}$$

**b) určení úhlového zrychlení**

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\frac{4\pi n}{t}}{t} = -\frac{4\pi n}{t^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot 54}{15^2} \text{ rad/s}^2 = -3,02 \text{ rad/s}^2$$

**c) určení tečného zrychlení**

$$a_t = r \cdot \varepsilon = 0,12 \cdot (-3,02) \text{ m/s}^2 = -0,362 \text{ m/s}^2$$

**d) určení počáteční frekvence**

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\frac{4\pi n}{t} = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{2n}{t} = \frac{2 \cdot 54}{15} \text{ Hz} = 7,2 \text{ Hz}$$

**Př. 6:** Setrvačné kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením  $2 \text{ rad/s}^2$  a otočí se za dobu  $\Delta t = t_2 - t_1 = 5 \text{ s}$  o úhel  $75 \text{ rad}$ . Jak dlouho se již roztáčelo před měřeními pěti sekundami?

$$\varepsilon = 2 \text{ rad/s}^2, \Delta t = 5 \text{ s}, \Delta\varphi = 75 \text{ rad}, \omega_0 = 0 \text{ rad/s}, t = ?$$

$$\text{Úhel otočení od počátku roztáčení do času } t_1: \varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2.$$

$$\text{Úhel otočení od počátku roztáčení do času } t_2: \varphi_2 = \frac{1}{2} \varepsilon t_2^2.$$

$$\text{Dosadíme: } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon t_2^2 - \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2 = \frac{1}{2} \varepsilon (t_2^2 - t_1^2)$$

$$\text{Chceme spočítat } t_1. \text{ Vyjádříme tedy } t_2 \text{ pomocí } \Delta t: t_2 = t_1 + \Delta t.$$

$$\text{Dosadíme: } \Delta\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon (t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2} \varepsilon ((t_1 + \Delta t)^2 - t_1^2) = \frac{1}{2} \varepsilon (t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2).$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon (2t_1\Delta t + \Delta t^2) = \frac{1}{2} \varepsilon 2t_1\Delta t + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t^2$$

$$\varepsilon t_1 \Delta t = \Delta\varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t^2$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t^2}{\varepsilon \Delta t}$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t^2}{\varepsilon \Delta t} = \frac{75 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5} = 5 \text{ s}$$

Setrvačné kolo se před měřeními 5 sekundami otáčelo 5 sekund.

**Shrnutí:** Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je analogií rovnoměrně zrychleného pohybu.