1.3.13 Pohyb po kružnici - shrnutí

Předpoklady: 010312

Pomocí dvou vět
U kruhového pohybu je výhodnější měřit úhel (který je pro všechny body stejný) než dráhu (která se pro body s různou vzdáleností od osy liší). Ke každé veličině i vzorci pro přímočarý pohyb tak získáme analogickou kruhovou veličinu.

Důležité znalosti
Kompletní přehled analogie normálních a úhlových veličin u kruhového pohybu

normální veličiny	**pojítko**	**úhlové veličiny**
dráha s $[\mathrm{m}]$	$s=\varphi r$	úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$
rychlost v $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v=\omega r$	úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$
zrychlení v $[\mathrm{m/s^2}]$ $a_t=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_t=\varepsilon r$	úhlové zrychlení $[\mathrm{rad/s^2}]$ $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
		úhlové veličiny související s opakováním (bez analogií u přímočarého pohybu)
		perioda $T[\mathrm{s}]$ $\Rightarrow$ $\omega=\frac{2\pi}{T}$
		frekvence $f=\frac{1}{T}[\mathrm{Hz}]$ $\Rightarrow$ $\omega=2\pi f$

rovnoměrný pohyb	**rovnoměrný pohyb po kružnici**
$v=$ konstanta	$\omega=$ konstanta
$s=s_0+vt$	$\varphi=\varphi_0+\omega t$
rovnoměrně zrychlený pohyb	**rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici**
$a=$ konstanta	$\varepsilon=$ konstanta
$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\varepsilon t$
$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2$

- Při rovnoměrném pohybu po kružnici se mění směr rychlosti $\Rightarrow$ jde o pohyb s normálovým zrychlením $\Rightarrow$ na předmět musí působit výsledná síla (zvaná podle směru působení dostředivá) o velikosti $F_d=m\frac{v^2}{r}$.

Zádrhele
- Dostředivá síla není nový typ síly, pouze role, kterou hrají různé síly (nebo jejich výslednice).

Dobré rady

- Při rovnoměrném nebo rovnoměrně zrychleném pohybu po kružnici postupujeme stejně jako u odpovídajících přímočarých pohybů (pouze s úhlovými veličinami).
- V situacích, kdy působí dostředivá síla, vycházíme z její velikosti (jako výslednice).

Př. 1: Harddisk počítače se otáčí rychlostí 7200 ot/min. Rozhodni bez dopočítávání hodnoty, které z následujících výrazů správně vyjadřují jeho úhlovou rychlost v rad/s. U každého správného výrazu najdi způsob výpočtu úhlové rychlosti, který k němu vedl.

a) $\frac{7200 \cdot 2\pi}{60}$ b) $\frac{120 \cdot 2\pi}{1}$ c) $\frac{2\pi}{\frac{1}{7200}}$ d) $2\pi \cdot 7200$

e) $\frac{2\pi}{\frac{1}{120}}$ f) $2\pi \cdot 120$

a) $\frac{7200 \cdot 2\pi}{60}$ - správné použití vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ pro otáčení v průběhu jedné minuty.

b) $\frac{120 \cdot 2\pi}{1}$ - správné použití vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ pro otáčení v průběhu jedné sekundy.

c) $\frac{2\pi}{\frac{1}{7200}}$ - nesprávné použití vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ pro jednu otáčku (nebo vzorce $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se špatně určenou periodou).

d) $2\pi \cdot 7200$ - nesprávné použití vzorce $\omega = 2\pi f$ (špatná hodnota frekvence).

e) $\frac{2\pi}{\frac{1}{120}}$ - správné použití vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ pro jednu otáčku (nebo vzorce $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

f) $2\pi \cdot 120$ - správné použití vzorce $\omega = 2\pi f$.

Př. 2: Urči periodu, frekvenci, úhlovou rychlost pohybu dětského kolotoče, který se za minutu otočil dvanáctkrát. Jakou rychlostí se pohybuje dítě sedící na koníku, který je od osy otáčení vzdálen 2,5 m.

60 s ... 12 otáček

Perioda $T = \frac{60}{12}\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$.

Frekvence: $f = \frac{12}{60}\,\mathrm{Hz} = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$.

$\omega = 2\pi \cdot 0{,}2 = 1{,}3\,\mathrm{rad/s}$

$v = \omega r = 1{,}3 \cdot 2{,}5\,\mathrm{m/s} = 3{,}1\,\mathrm{m/s}$

Kolotoč se pohybuje s periodou 5 s, frekvencí 0,2 Hz a úhlovou rychlostí 1,3 rad/s. Dítě na koníku se pohybuje rychlostí 3,1 m/s.

Př. 3: Jaroušek se houpá na houpačce. Urči jakou silou působí sedačka na Jarouška v nejnižším místě její dráhy, pokud se Jaroušek pohybuje v tomto bodě rychlostí 5 m/s a váží 25 kg. Délka závěsu houpačky je 3 m, nejvyšší výška, do které Jaroušek během houpání vystoupá je 1,25 m.

$m = 25\,\mathrm{kg}$, $r = 3\,\mathrm{m}$, $v = 5\,\mathrm{m/s}$, $F_s = ?$

- N Jarouška působí v nejnižším místě dráhy dvě síly:
  gravitační F_g kolmo dolů
- síla sedačky F_s kolmo vzhůru.

Jejich výslednice musí směřovat kolmo vzhůru a hrát roli dostředivé síly $F_d = F_s - F_g \Rightarrow$

$$F_s = F_g + F_d = mg + m\frac{v^2}{r} = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right) = 25\left(10 + \frac{5^2}{3}\right)\mathrm{N} = 460\,\mathrm{N}$$

Jaroušek působí na sedačku silou 460 N.

Př. 4: Soustruh zpomalil své otáčení z 3000 ot/min na 2500 ot/min během dvou sekund. Urči jeho úhlové zrychlení. Kolikrát se při tom otočil?

$\omega_0 = 3000\,\mathrm{ot/min} = 3000 \cdot \dfrac{2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}} = 314\,\mathrm{rad/s^2}$, $\omega = 2500\,\mathrm{ot/min} = 2500 \cdot \dfrac{2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}} = 262\,\mathrm{rad/s^2}$ m,

$t = 2\,\mathrm{s}$, $\varepsilon = ?$, $n = ?$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{262 - 314}{2}\,\mathrm{rad/s^2} = -26\,\mathrm{rad/s^2}$$

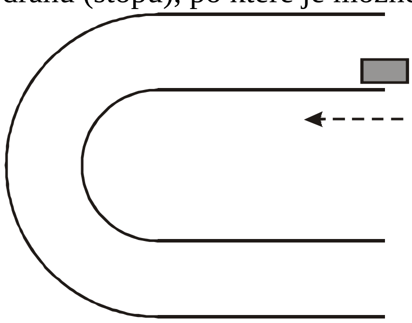
Ze zadaných veličin můžeme spočítat úhel otočení a z něj počet otáček.

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = 314 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-26)\,2^2\,\mathrm{rad} = 576\,\mathrm{rad}$$

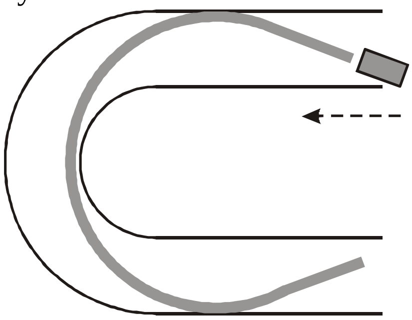
$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{576}{2\pi} = 92$$

Soustruh zpomaloval otáčení s úhlovým zrychlením $-26\,\mathrm{rad/s^2}$. Během zpomalování se otočil 92 krát.

Př. 5: Na obrázku je nakreslena závodní dráha se zatáčkou. Dokresli do obrázku ideální dráhu (stopu), po které je možné zatáčku projet nejvyšší rychlostí.



Při průjezdu zatáčkou musí na auto působit dostředivá síla (auto se pohybuje se zrychlením), roli dostředivé síly hraje tření mezi pneumatikami a silnicí. Velikost tření je určena koeficientem a působící tlakovou silou auta na silnici. Při rostoucí rychlosti a zmenšujícím se poloměru zatáčky se potřebná dostředivá síla zvyšuje $\Rightarrow$ auto musí zpomalit tak, aby tření bylo dostatečně velké.



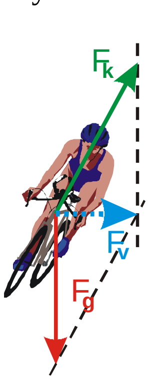
Auto musí jet tak, aby co nejvíce zvětšilo poloměr zatáčky (tím se zmenší potřebná dostředivá síla a auto může zatáčku projet rychleji).

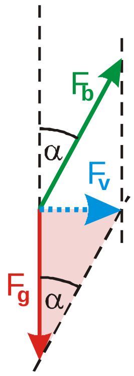
Dodatek: Tato ideální stopa je dobře viditelná na konci každých závodů F1 nebo Moto GP.

Př. 6: Petr vjíždí na kole do zatáčky o poloměru 20 m rychlostí 25 km/h. O jaký úhel se musí naklonit od svislého směru? Jaký musí být koeficient tření mezi kolem a silnicí, aby nespadl?

$r = 20\,\mathrm{m}$, $v = 25\,\mathrm{km/h} = 6{,}9\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = ?$

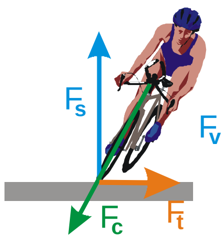
Petr se musí naklonit tak, aby výslednice gravitační síly a síly kola mohla hrát roli dostředivé síly.





Z pravoúhlého trojúhelníku vidíme, že platí: $\frac{F_v}{F_g} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_d}{F_g} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} = \frac{6{,}9^2}{10 \cdot 20} = 0{,}24 \;\Rightarrow\; \alpha = 13°23'$$



Silou, která zabraňuje uklouznutí kola je tření mezi pneumatikou a silnicí $\Rightarrow$ velikost třecí síly se rovná velikosti síly dostředivé.

$F_t = F_d$

$$Nf = mgf = m\frac{v^2}{r}$$

$$f = \frac{v^2}{gr} = \frac{6{,}9}{10 \cdot 20} = 0{,}24$$

Petr se musí naklonit směrem do zatáčky o úhel $13°33'$, koeficient tření musí být větší než 0,24.

Př. 7: Železniční vůz přejíždí kruhovým obloukem trati rovnoměrně zrychleně. V bodě M měl rychlost $v_1 = 10\,\text{m/s}$, v bodě N $v_2 = 20\,\text{m/s}$. Dráhu $s = \text{MN}$ projel za $t = 20\,\text{s}$. Poloměr křivosti oblouku je $r = 200\,\text{m}$. Stanov úhlové rychlosti ω_1, ω_2 a okamžitá dostředivá zrychlení a_{n1}, a_{n2} v bodech M, N, dále tečné zrychlení a_t a úhlové zrychlení ε na dráze s, úhel φ opsaný za dobu *t* vlakem i délku oblouku MN. Stanov dále tažnou sílu F_t motoru vozu na dráze s i síly F_1 a F_2, kterými působil vlak na kolejnice v bodech M, N ve vodorovném směru, jestliže hmotnost vozu byla $m = 10000\,\text{kg}$.

$v_1 = 10\,\text{m/s}$ $v_2 = 20\,\text{m/s}$ $t = 20\,\text{s}$ $r = 200\,\text{m}$ $m = 10000\,\text{kg}$

a) Výpočet úhlových rychlostí

$$v_1 = \omega_1 r \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}\,\text{rad/s} \qquad v_2 = \omega_2 r \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}\,\text{rad/s}$$

b) výpočet dostředivých zrychlení

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{r} = 0{,}5\,\text{m/s}^2 \qquad a_{n2} = \frac{v_2^2}{r} = 2\,\text{m/s}^2$$

c) výpočet tečného zrychlení

Tečné zrychlení je změna obvodové rychlosti. Řešíme jako rovnoměrně zrychlený pohyb.

$$v_2 = v_1 + a_t t \Rightarrow a_t = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{20-10}{20} = 0{,}5\,\text{m/s}^2$$

d) výpočet úhlového zrychlení

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = 0{,}0025\,\text{rad/s}^2$$

e) úhel opsaný za dobu *t*

$$\varphi = \omega_1 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{1}{20}20 + \frac{1}{2}0{,}0025 \cdot 20^2 = 1{,}5\,\text{rad}$$

f) délka oblouku MN

$s = \varphi \cdot r = 1{,}5 \cdot 200 = 300\,\text{m}$ (možné použít i $s = v_1 t + \frac{1}{2}a_t t^2$)

g) tažná síla

Působením lokomotivy se zvětšuje velikost rychlosti vlaku $\Rightarrow$ důsledkem tahu lokomotivy je nenulové tečné zrychlení vlaku $\Rightarrow$ použijeme 2.NZ:

$$a_t = \frac{F}{m} \Rightarrow F = ma_t = 10000 \cdot 0{,}5 = 5000\,\text{N}.$$

h) síly F_1 a F_2 působící na kolejnice (jsou reakcí na dostředivou sílu, nutnou k udržení vlaku v zatáčce)

$$F_1 = m \cdot a_{n1} = 10000 \cdot 0{,}5 = 5000\,\text{N} \qquad F_2 = m \cdot a_{n2} = 10000 \cdot 2 = 20000\,\text{N}$$

Př. 8: Během jízdy z kopce se rychlost otáčení kola zvýšila z 1,9 ot/s na 3 ot/s. S jakým zrychlením a jakou dobu Petr kopec sjížděl, jestliže je dlouhý 65 m. Průměr kola je 70 cm.

Máme určit zrychlení, známe dráhu $\Rightarrow$ jde o rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb. Z rychlosti otáčení můžeme spočítat rychlosti.

$d = 70\,\text{cm} \Rightarrow r = 35\,\text{cm} = 0{,}35\,\text{m}$

$\omega_0 = 1{,}9\ \text{ot/s} = 1{,}9 \cdot 2\pi\,\text{rad/s} = 12\,\text{rad/s} \Rightarrow v_0 = \omega_0 \cdot r = 12 \cdot 0{,}35\,\text{m/s} = 4{,}2\,\text{m/s}$

$\omega = 3\ \text{ot/s} = 3 \cdot 2\pi\,\text{rad/s} = 19\,\text{rad/s} \Rightarrow v = \omega \cdot r = 19 \cdot 0{,}35\,\text{m/s} = 6{,}6\,\text{m/s}$

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb: $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Z rovnice pro rychlost vyjádříme čas: $v = v_0 + at \Rightarrow \frac{v - v_0}{a} = t$.

Dosadíme do rovnice pro dráhu: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$

$$s = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2s = \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a}$$

$$2sa = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{6{,}6^2 - 4{,}2^2}{2 \cdot 65}\,\text{m/s}^2 = 0{,}20\,\text{m/s}^2$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{2s(v - v_0)}{(v - v_0)(v + v_0)} = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2 \cdot 65}{6{,}6 + 4{,}2}\,\text{s} = 12\,\text{s}$$

Petr sjížděl kopec 12 sekund se zrychlením $0{,}20\,\text{m/s}^2$.

Shrnutí: