1.6.8 Pohyby v centrálním gravitačním poli Země

Předpoklady: 1602

Pedagogická poznámka: Pokud necháte experimentovat s modelem studenty, i v případě, že už program Modellus znají, strávíte touto hodinou dvě vyučovací hodiny (samotný učitel dokáže oditerovat úkoly daleko rychleji). Přesto bych se za využití samostatné práce studentů velmi přimlouval, postupné iterování je velmi blízké způsobu, kterým studenti uvažují a přesto vyžaduje (pokud má být efektivní) dobrou orientaci a logické uvažování. Důležité je i to, že se žákům líbí a představuje zajímavou změnu.
Jinak platí to co pro každou samostatnou práci na počítačích: má smysl se o ni pokoušet pouze v případě, že jsou studenti schopni pracovat samostatně i normálně, na všech počítačích by mělo být to samé a je třeba kontrolovat, co studenti dělají (například doplňováním do souboru se zadáním).

Pedagogická poznámka: Modellus je možné stáhnout na stránkách www.realisticky.cz. Jde o původem portugalský program, přeložený do češtiny se sadou fyzikálních modelů. Bohužel je ve verzi 2,5, která je původem ještě 16 bitová a na Windows 7 se mohou vyskytovat problémy. V takovém případě překopírujte celý adresář s modelem na lokální disk (model nelze otevírat ze sítě), v úplném názvu (včetně cesty) by neměly být mezery, háčky a jiné problematické znaky. Existuje i novější verze programu Modellus X stažitelná z oficiálních stránek, model v ní bohužel nefunguje. Zatím jsem neměl čas se tím více zabývat.

Chceme prozkoumat pohyby družic a kosmických lodí v okolí Země.

Př. 1: Rozmysli, zda pro popis pohybu družice okolo Země můžeme použít rovnice odvozené pro vrhy.

Rovnice odvozené pro vrhy jsme odvodili za základního předpokladu konstantní gravitační síly (homogenního gravitačního pole) $\Rightarrow$ tento předpoklad při pohybu družice okolo Země neplatí, mění se směr gravitační síly a často i její velikost (pokud se mění vzdálenost od středu Země) $\Rightarrow$ rovnice pro vrhy použít nemůžeme.

Protože gravitační síla mění během pohybu družice okolo Země minimálně svůj směr, nemůžeme na středoškolské úrovni obecně popsat pohyb družice okolo Země pomocí pohybových rovnic $\Rightarrow$ použijeme modelování pomocí počítače.

Př. 2: V počítačovém modelu postupně měň velikost počáteční rychlosti sondy od 0 do 10000 m/s a sleduj, jak se mění oběžná dráha. Urči co nejpřesněji rychlost, při které sonda obíhá kolem Země po kruhové dráze (kruhovou rychlost). Při jaké nejmenší rychlosti sonda obletí Zemi? Hodnoty pro každý uskutečněný pokus zapisuj do tabulky (postupně přidávej řádky).

$v_0 [\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$	**doba oběhu [h]**	**nejmenší vzdálenost středu od Země [km]**	**největší vzdálenost od středu Země [km]**	$v_{min} [\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$

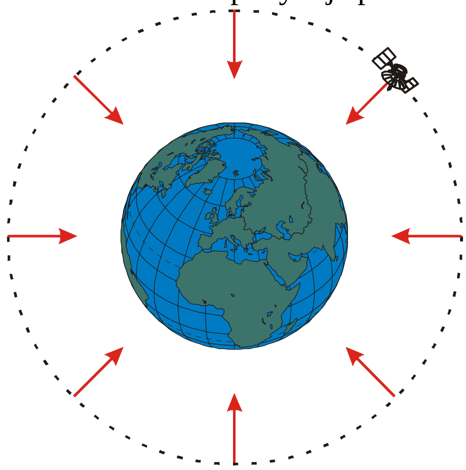
$v_0[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$	**doba oběhu [h]**	**nejmenší vzdálenost středu od Země [km]**	**největší vzdálenost od středu Země [km]**	$v_{\min}[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
0	pád na zem 1,3	0	20000	
1000	pád na zem 1,3	0	20000	
3000	pád na zem 1,9	0	20000	
5000	12	20000	33600	3000
4000	6	13300	20000	4000
4400	7,4	18860	20000	4700
4450	7,5	19720	20000	4500
4460	7,6	19900	20000	4500
4465	7,7	19985	20000	4500
4466	7,8	20000	20003	4500
3600	5	9600	20000	3600
3300	4,6	8100	20000	3400
3150	4,4	6600	20000	3150

Odhad nejmenší rychlosti potřebné k oběhu Země je možné ještě zpřesňovat.

Pedagogická poznámka: Rozhodně nečekám, až všichni najdou nejmenší rychlost nutnou k oběhu Země. Rozhodující je, aby se všichni dostali k přibližné hodnotě kruhové rychlosti.

Př. 3: Nakresli obrázek se Zemí a družicí obíhají okolo ní po kruhové dráze. Nakresli do obrázku síly, které působí na družici. Odvoď vztah pro výpočet kruhové rychlosti v závislosti na vzdálenosti družice od středu Země.

Pokud se družice pohybuje po kruhu, pohybuje se rovnoměrným otáčivým pohybem.



Na družici působí jediná síla - gravitační síla, směřuje přesně do středu tohoto kruhu (středu Země) a hraje tak roli dostředivé síly: $F_g = F_d$.

$$\kappa \frac{m_s M_Z}{R^2} = m_s \frac{v^2}{R}$$

$$\kappa \frac{M_Z}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$\kappa \frac{M_Z}{R} = v^2$$

$v = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}}$, kde je R je vzdálenost sondy od středu Země a M_Z je její hmotnost.

Pro každou vzdálenost od středu Země existuje jedna hodnota vyhovující kruhové rychlosti, hodnoty kruhové rychlosti se zmenšují se vzdáleností od středu Země.

Velmi často se vzdálenost R sondy od středu Země zapisuje pomocí poloměru Země R_Z a výšky sondy nad jejím povrchem h takto: $R = R_Z + h$. Pro kruhovou rychlost tak získáme vzorec: $v_k = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R_Z + h}}$.

Př. 4: Urči kruhovou rychlost pro následující oběžnice Země:
a) sondu z našeho modelu (obíhá ve vzdálenosti 20 000 km od středu Země),
b) kosmickou stanici ISS (obíhá ve vzdálenosti 350 km nad povrchem Země),
c) Měsíc (obíhá ve vzdálenosti 384000 km od Země).
Výsledky v bodech a) a b) ověř pomocí modelu. Hmotnost Země je $5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.
Pro Měsíc urči dobu oběhu a porovnej výsledek se skutečností.

a) kruhová rychlost sond z našeho modelu (obíhá ve vzdálenosti 200000 km od středu Země)

$$v = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{20000000}} = 4466\ \mathrm{m/s}$$

b) kosmickou stanici ISS, která obíhá ve vzdálenosti 350 km nad povrchem Země

$$v = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R_Z + h}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6378000 + 350000}}\ \mathrm{m/s} = 7700\ \mathrm{m/s}$$

c) Měsíc, který obíhá ve vzdálenosti 384000 km od Země

$$v = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{384000000}}\ \mathrm{m/s} = 1020\ \mathrm{m/s}$$

Měsíc se pohybuje okolo Země rovnoměrně $\Rightarrow$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}}} = \frac{2\pi R \sqrt{R}}{\sqrt{\kappa M_Z}} = \frac{2\pi \sqrt{R^3}}{\sqrt{\kappa M_Z}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M_Z}}$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M_Z}} = 2\pi \sqrt{\frac{385\,000\,000^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}}\ \mathrm{s} = 2{,}38 \cdot 10^9\ \mathrm{s} = 27{,}5\ \mathrm{dne}$$

Výsledky výpočtu odpovídají výsledkům získaným modelováním. Vypočtená oběžná doba měsíce 27,5 dne je v dobrém souladu s udávanou oběžnou dobou 27 dní 7 hodin.

Pedagogická poznámka: Poloměr Země není uveden záměrně. Žáci sedí u počítačů připojených na internet a mají možnost si jakýkoliv údaj na internetu najít (občas je pro obě strany velmi poučné sledovat, jaké problémy s takovou prkotinou někteří příslušníci „síťové“ generace mají).

Pedagogická poznámka: Na ověřování bodu b) je zajímavé, že si žáci všimnou, že výška ve které obíhá stanice ISS je vzhledem k poloměru Země velmi malá.

Nejznámější kruhovou rychlost pro družice Země získáme, když dosadíme nulovou výšku nad povrchem Země: $R = 6378\,\text{km}$ (poloměr Země).

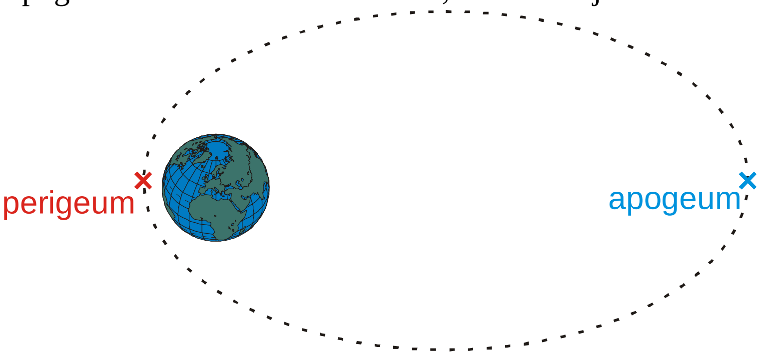
$$v_k = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6378000}} = 7908\,\text{m/s}$$

Tato hodnota kruhové rychlosti se nazývá **první kosmická rychlost**.

Doba oběhu: $T = \frac{2\pi R}{v_k} = \frac{2\pi \cdot 6378000}{7908}\,\text{s} = 5068\,\text{s} = 84,4\,\text{min}$.

Př. 5: Najdi na internetu význam slov perigeum a apogeum. Nakresli do obrázku Země a sondy s eliptickou oběžnou drahou oba body.

Perigeum – místo na oběžné dráze, ve kterém je oběžnice nejblíže k Zemi.
Apogeum – místo na oběžné dráze, ve kterém je oběžnice nejdále od Země.



Pedagogická poznámka: Studenti sice ještě nemají probrány Keplerovy zákony, ale situaci viděli během předchozí práce několikrát. Často sice nakreslí elipsu, ale Zemi kreslí do středu nebo oba body ani nemají v elipse naproti. V závislosti na tom, jaký odkaz vyhodí vyhledávač jako první se občas snaží kreslit obrázky s několika oběžnými drahami. Jiní pouze opíší definice.

Př. 6: Změň nastavení modelu tak, aby sonda startovala z povrchu Země. Zvětšuj v počítačovém modelu postupně rychlost sondy startující z povrchu Země a sleduj, jak se mění její oběžná dráha okolo Země. Při jaké rychlosti se sonda k Zemi již nevrátí? Na základě jakého zákona bychom mohli tuto rychlost určit? Hodnoty, které popisují každý z Tvých pokusů vyplň do následující tabulky.

$v_0[\text{km}\cdot\text{s}^{-1}]$	**doba oběhu [h]**	**perigeum [km]**	**apogeum [km]**	$v_{\min}[\text{km}\cdot\text{s}^{-1}]$

$v_0[\text{km}\cdot\text{s}^{-1}]$	**doba oběhu [h]**	**perigeum [km]**	**apogeum [km]**	$v_{\min}[\text{km}\cdot\text{s}^{-1}]$
8	1,4	6378	6680	7,6
9	2,4	6378	11700	4,9
10	5,8	6378	25400	2,5
11	84,6	6378	189300	0,4

Sonda se pohybuje po čím dál protáhlejších elipsách. Při rychlostech větších než 11 km/s je pohyb sondy velmi dlouhý a zdá se, že se k Zemi již nevrátí.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu je třeba lepší odhad, protože příliš velká rychlost znamená nekonečně dlouhou dobu pokusu. Je také zajímavé sledovat, kolik žáků začne rychlostí větší než $7,9\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Rychlost potřebnou k opuštění gravitačního pole Země bychom mohli určit na základě zákona zachování energie: kinetická energie sondy při startu se musí rovnat potenciální energii sondy v nekonečné vzdálenosti od Země. Bohužel nejsme matematicky schopni tento problém vyřešit, protože gravitační síla, kterou musíme při vzdalování překonávat, se se vzdáleností od středu Země postupně zmenšuje.
Nejmenší rychlost, při které sonda opustí gravitační pole Země, se nazývá parabolická rychlost (sonda se v tomto případě pohybuje po parabole) a z kruhové rychlosti ji můžeme vypočítat ze vztahu: $v_p = v_k\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{\kappa\frac{M_Z}{R}} = \sqrt{\kappa\frac{2M_Z}{R}}$.
Pro povrch Země:

$$v_p = \sqrt{\kappa\frac{2M_Z}{R}} = \sqrt{6,67\cdot10^{-11}\frac{2\cdot5,98\cdot10^{24}}{6378000}}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 11190\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \doteq 11,2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Této hodnotě říkáme **druhá kosmická rychlost**.

Vrátíme se k sondám, které Zemi obíhají, a kruhové rychlosti.
Se vzdáleností kruhová rychlost klesá $\Rightarrow$ mohla by existovat vzdálenost, ve které družice oběhne Zemi jednou za 24 hodin $\Rightarrow$ taková družice bude „stát“ nad jedním konkrétním místem na zemském povrchu a proto se jí říká geostacionární.

Př. 7: Najdi pomocí modelu vzdálenost, ve které musí kolem Země obíhat geostacionární družice (družice, které oběhnou Zemi jednou za 24 hodin, otáčejí se tak se Zemí a při svém pohybu „stojí“ nad jedním místem jejího povrchu. Otáčení Země je znázorněno šipkou. Hodnoty, které popisují každý z Tvých pokusů vyplň do následující tabulky.

$v_0[\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	$R_0[\mathrm{km}]$	**doba oběhu [h]**	**perigeum [km]**	**apogeum [km]**	$v_{min}[\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$

$v_0[\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	$R_0[\mathrm{km}]$	**doba oběhu [h]**	**perigeum [km]**	**apogeum [km]**	$v_{min}[\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$
4,5	21000	9,2	21000	23900	3
3	30000	9,4	15400	30000	3
3	35000	13,6	22800	30000	3
3	42000	22	37800	42000	3
3	43000	23,6	40500	43000	3

Geostacionární družice obíhají Zemi přibližně ve vzdálenosti 43000 km od středu Země.

Pedagogická poznámka: Opět je zajímavé, kdo začne alespoň výsledky z prvního pokusu. Pokud je málo času, řekněte studentům, aby v tabulce vyplňovali pouze první dva sloupce, tím se iterování značně urychlí, protože geostacionárnost družice je znát už z malé části oběhu.

Př. 8: Odvoď vzorec pro vzdálenost, ve které obíhají geostacionární družice.

I geostacionární družice se pohybuje po kružnici $\Rightarrow$ gravitační síla směřuje do středu a hraje tak roli dostředivé síly.

$F_g = F_d$

$\kappa \frac{m_s M_Z}{R^2} = m_s \frac{v^2}{R}$

$\kappa \frac{M_Z}{R^2} = \frac{v^2}{R}$

$\kappa \frac{M_Z}{R} = v^2$

Rychlost družice nemůže být libovolná, aby se sonda udržela nad stejným místem povrchu Země, musí ji oběhnout jednou za den $\Rightarrow$ $T = 1\,\text{den} = 86400\,\text{s}$.

$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T}$

Dosadíme: $\kappa \frac{M_Z}{R} = v^2 = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$.

$\kappa \frac{M_Z}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$

$R^3 = \kappa \frac{M_Z T^2}{4\pi^2}$

$R = \sqrt[3]{\kappa \frac{M_Z T^2}{4\pi^2}}$

Dosazení: $R = \sqrt[3]{\kappa \frac{M_Z T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}}\,\text{m} = 42250000\,\text{m} = 42250\,\text{km}$.

Vzdálenost od Země: $h = R - R_Z = 42250 - 6378\,\text{km} = 35872\,\text{km}$.

Rychlost oběhu: $v = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{42250000}}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 3070\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Geostacionární družice létají ve vzdálenosti 35 872 km nad povrchem Země.

Př. 9: Najdi na internetu oběžnou vzdálenost geostacionárních družic a srovnej údaj s předchozími výsledky.

Wikipedia: $h = 35786\,\text{km}$.

www.meteopress.cz: necelých 36000 km.

Výpočet směru geostacionární družice: 36830 km (nad rovníkem).

Všechny výsledky odpovídají námi určené hodnotě.

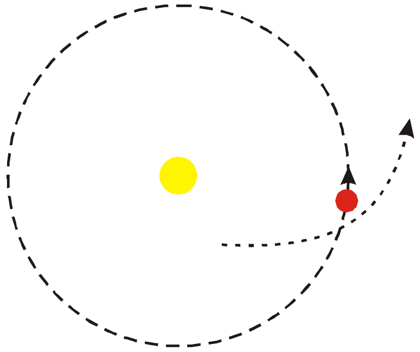
Př. 10: Najdi na internetu význam a hodnotu 3. kosmické rychlosti.

3. kosmická rychlost – rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Slunce $\Rightarrow$ záleží na vzdálenosti od Slunce. Pro Zemi se udávají dvě hodnoty:

- $16,7\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ pro tělesa startující z povrchu Země,
- $13,8\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ pro tělesa startující z vyčkávací dráhy okolo Země.

Př. 11: Najdi na internetu, co znamená, že se při vyslání kosmické sondy využilo gravitačního praku. Nakresli obrázek se Slunce a celé oběžné dráhy Jupitera s vyznačeným směrem oběhu kolem Slunce. Do obrázku dokresli dráhu kosmické sondy, která využije gravitačního praku Jupitera k cestě mimo Sluneční soustavu.

Gravitační prak: Sonda při pohybu v okolí planety využije její gravitační síly, ke zvýšení své rychlosti. Při oběhu okolo stojící Země se rychlost sondy na konkrétním místě oběžné dráhy nemění, při pohybu v okolí pohybující se planety, planeta strhává sondu ve směru svého pohybu $\Rightarrow$ zvyšuje její rychlost.



Sonda musí letět tak, aby v blízkosti Jupitera směřovala podobným směrem, kterým Jupiter letí okolo Slunce. Přitažlivost Jupitera nedokáže sondu zachytit na oběžnou dráhu okolo planety, ale zvětší její rychlost vzhledem ke Slunci (a tím i rychlost, kterou směřuje mimo Sluneční soustavu).

Shrnutí: Pohyb v centrální gravitační poli nemůžeme popisovat pomocí vzorců odvozených pro vrhy (mění se směr i velikost gravitační síly). Obíhající tělesa se pohybují po kružnicích nebo elipsách.