

1.6.9 Keplerovy zákony

Předpoklady: 1608

Pedagogická poznámka: K výkladu této hodiny používám freewareový program [Celestia](#) (3D simulátor vesmíru), který umožňuje putovat vesmírem a sledovat ho z různých míst v normálním i téměř libovolně změněném čase. Přibližnou formulaci Keplerových zákonů tak studenti mohou přímo odpozorovat. Doporučuji si nejdříve program trochu osahat, jeho ovládání není pro uživatele bez zkušeností s 3D programy příliš intuitivní.

Denní a hlavně noční obloha: velmi nápadné a zajímavé jevy \Rightarrow lidé je pozorovali a interpretovali od nepaměti.

Problém: obloha se během noci otáčí, obraz se mění i během roku.

Nejstarší poznatky: dva druhy nočních „světél“

- světla, která se navzájem nepohybují, vždy je vidíme jako body \Rightarrow hvězdy,
- světla, která se mezi ostatními pomalu pohybují, můžeme je vidět jako plošky \Rightarrow planety (původně Merkur, Venuše, Mars, Jupiter, Saturn).

Jak to celé funguje?

Geocentrický systém (Ptolemaios, vládnoucí doktrína do 17. století)

Středem všehomíra je Země, okolo ní obíhá Měsíc, Slunce i ostatní planety, za nimi se otáčí nebeská klenba s namalovanými hvězdami.

Propracovaný a složitý systém (cykly, epicykly), velmi dobrá shoda s pozorováním.

Snaha o jednoduchost \Rightarrow **Heliocentrický systém** (M. Koperník)

Středem všehomíra je Slunce, okolo něho obíhá Země (kolem ní Měsíc) i ostatní planety, hvězdy tvoří nehybné pozadí. Denní (roční) pohyb oblohy je zdánlivý, způsobený rotací Země okolo své osy (oběhem Země okolo Slunce).

V počáteční podobě horší shoda s pozorováním, ale nepochybná elegance.

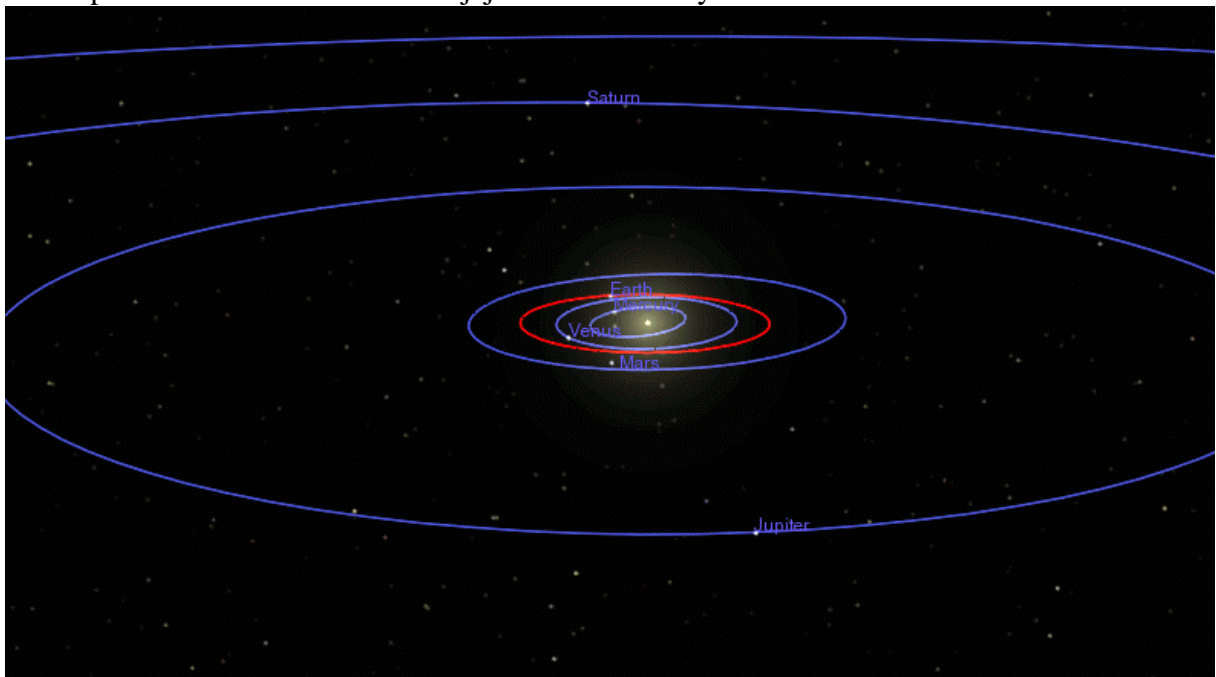
Tycho Brahe (dvorní astronom císaře Rudolfa v Praze): nejlepší data o pozorování oblohy na světě. Po jeho smrti se (prý kvůli zmiňovaným údajům) do Prahy přestěhovat Johannes Kepler a na jejich základě zformulovat **Keplerovy zákony** (popisují pohyb planet okolo Slunce, nic neříkají o příčinách tohoto pohybu).

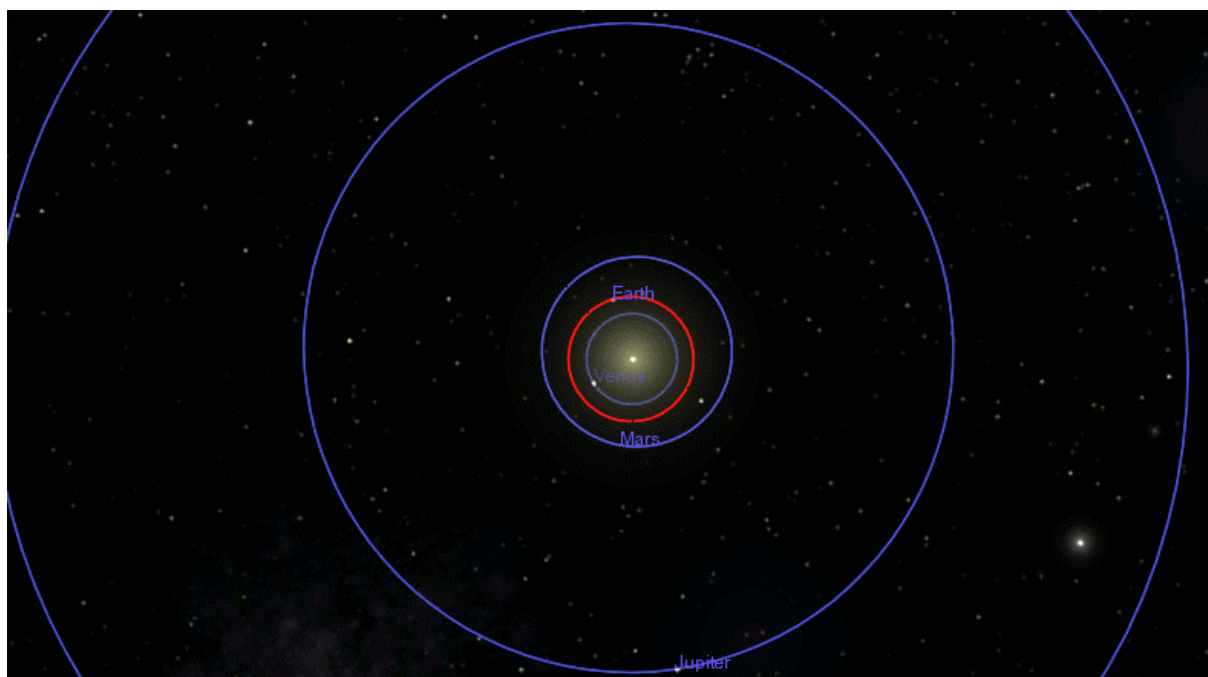
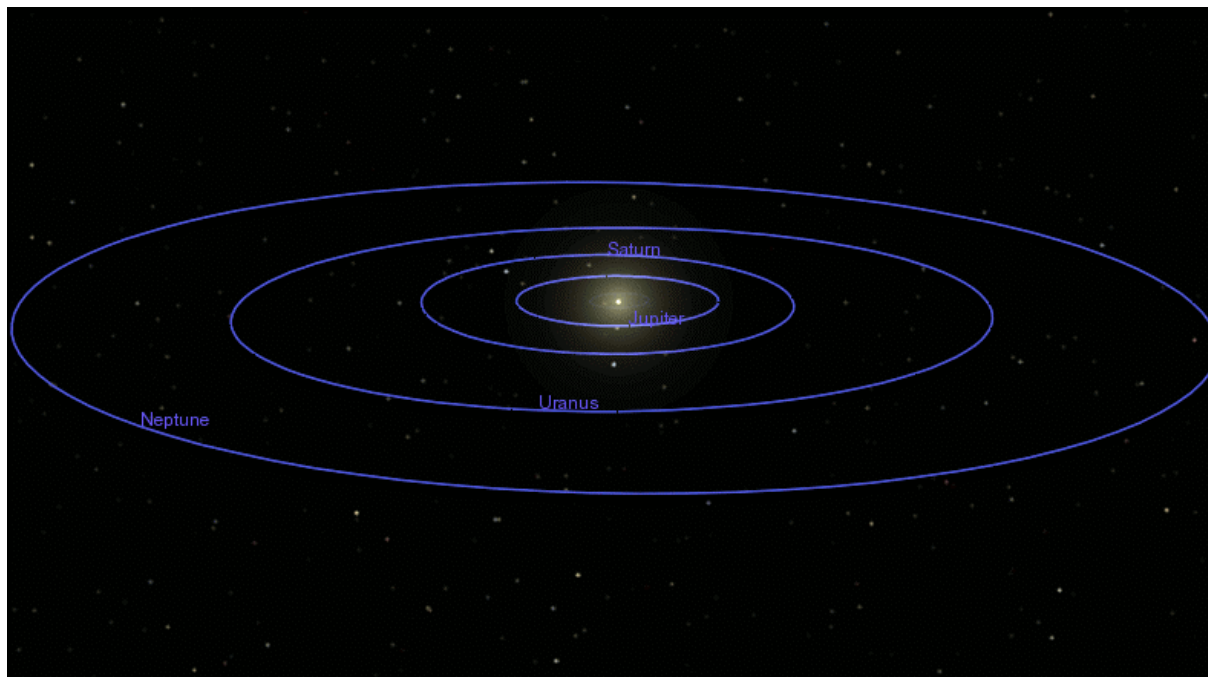
Počítačové programy umožňují sledovat vesmír zrychleně a z míst, na které se lidé ještě nikdy nedostali \Rightarrow odhalení Keplerových zákonů je pak hračkou.

Pohled na Zemi a Měsíc ze vzdálenosti 630 000 km (1,6 násobek vzdálenosti Země-Měsíc)



Prostor je skoro prázdný, Měsíc ani Saturn se příliš neliší od hvězdného pozadí \Rightarrow kromě názvů planet si necháme nakreslit i jejich oběžné dráhy.





Při pohledu na sluneční soustavu vidíme, že:

- planety se pohybují přibližně v jedné rovině,
- jejich oběžné dráhy připomínají kružnice se Sluncem ve společném středu.

Při pečlivějším prozkoumání zjistíme, že oběžné dráhy nemají přesně tvar kružnice, ale elipsy.

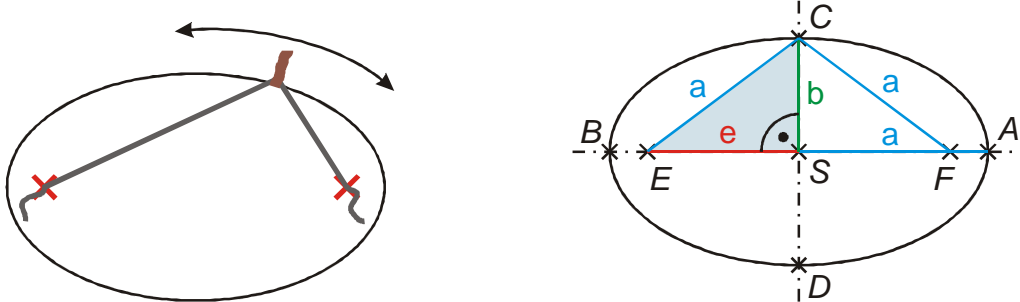
První Keplerův zákon

Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Zákon platí i pro komety na jejichž drahách je daleko zřejmější.

Dodatek: Oběžné dráhy planet nejsou zcela přesné elipsy, protože kromě gravitačního působení Slunce na sebe působí navzájem i planety. Právě z nepravidelností oběžné dráhy Uranu se podařilo předpovědět a posléze najít planetu Neptun.

Elipsa: kromě středu S má dvě další významné body – ohniska elipsy E, F (zahradní konstrukce elipsy využívá právě ohniska, do kterých se připevní provázek a jeho vypínáním se postupně nakreslí elipsa).



Na obrázku jsou vyznačeny kromě ohnisek i další významné prvky elipsy: střed S , hlavní poloosa a , vedlejší poloosa b , excentricita e , hlavní vrcholy A, B , vedlejší vrcholy C, D .

Př. 1: Odhadni význam termínů perihélium, afélium.

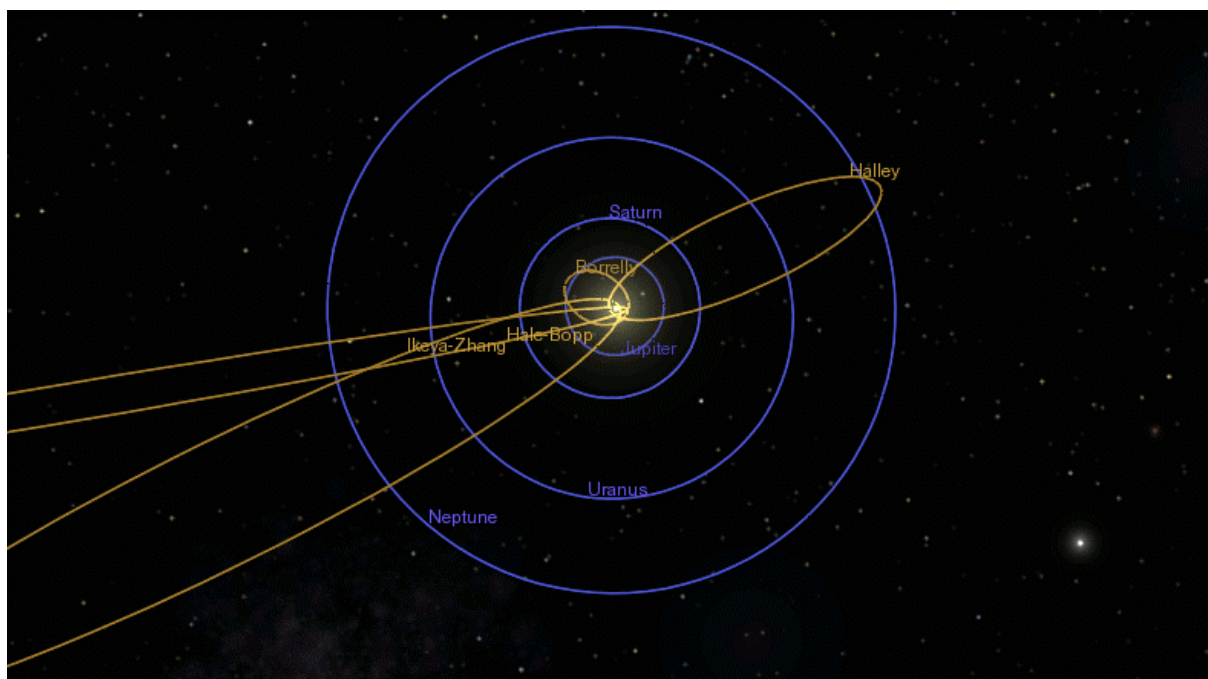
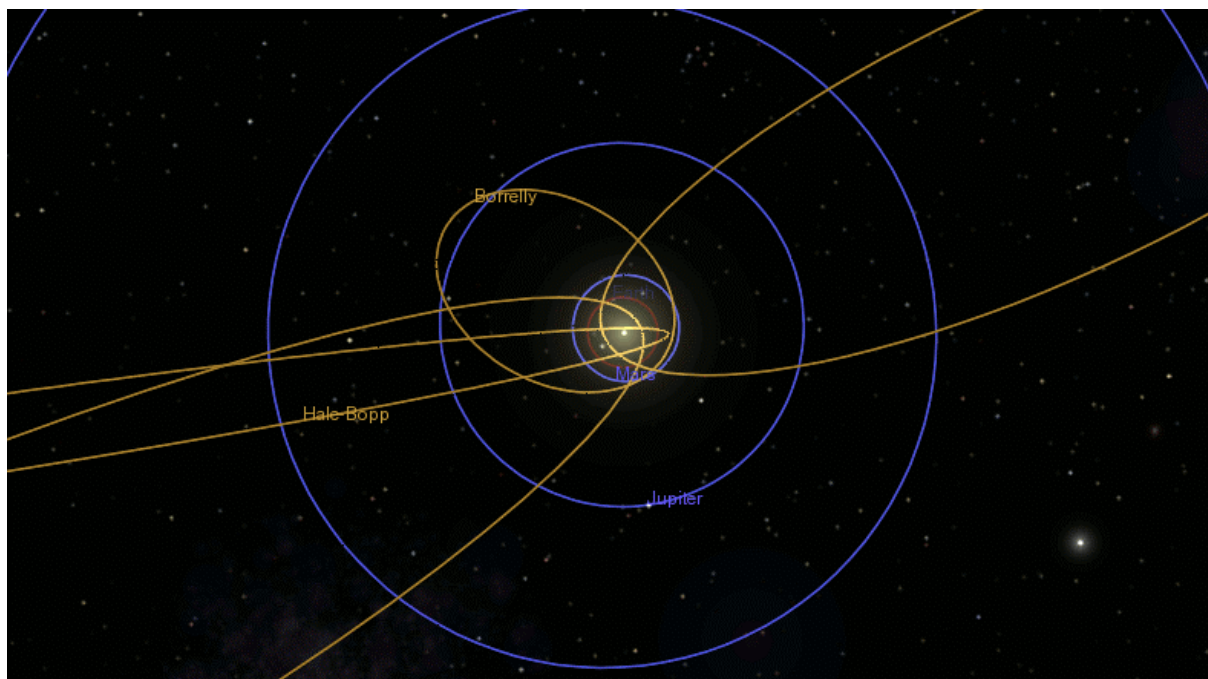
Významné body na oběžné dráze:

Perihélium – místo na oběžné dráze, ve kterém je oběžnice nejbliže ke Slunci (jako perigeum).

Afélium – místo na oběžné dráze, ve kterém je oběžnice nejdále od Slunce (jako apogeum).

Oběžnice se nepohybují celou dobu stejnou rychlostí, tento rozdíl je však dobře pozorovatelný pouze u komet:

- v okolí perihélia je rychlost oběžnice je největší, směrem k perihéliu narůstá, směrem od něj klesá.
- v okolí afélia je rychlost oběžnice je nejmenší, směrem k aféliu klesá, směrem od něj roste.



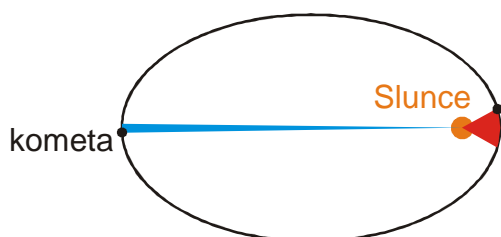
Předchozí závislost je možné popsat i kvantitativně.

Druhý Keplerův zákon.

Plocha opsaná průvodičem planety za jednotku času se nemění.

Průvodič je úsečka spojující střed oběžnice se středem Slunce.

Př. 2: Nakresli obrázek oběžné dráhy komety kolem Slunce a znázorni druhý Keplerův zákon.



Př. 3: I když není změna rychlosti Země při oběhu kolem Slunce patrná z programu Celestia, není rozhodně zanedbatelná. Například na severní polokouli trvá zimní půlrok (od podzimní rovnodennosti do jarní) 179 dní, zatímco letní půlrok (od jarní rovnodennosti do podzimní) 186 dní. Kdy je Země nejbližší ke Slunci?

Zimní půlrok je kratší \Rightarrow Země se pohybuje větší rychlostí \Rightarrow v zimě je blíže ke Slunci než v létě.

Dodatek: Skutečnost, že v létě je na severní polokouli větší teplo, tedy není způsobena menší vzdáleností od Slunce, ale úhlem dopadu slunečních paprsků. V létě dopadají na severní polokouli svisleji (na jednotku plochy jich tak dopadne více), v zimě naopak vodorovněji (na jednotku plochy jich tak dopadne méně). Na jižní polokouli je situace opačná a proto je opačný i výskyt ročních období.

Př. 4: Zkus 2. Keplerův zákon vysvětlit kvalitativně pomocí zákona zachování energie.

Větší vzdálenost od Slunce \Rightarrow větší potenciální gravitační energie \Rightarrow pokud se celková mechanická energie nemění musí být kinetická energie menší.

Můžeme studovat nejen oběh jedné planety kolem Slunce, ale i vzájemné vztahy mezi oběhy různých planet: čím jsou planety dále od Slunce, tím pomaleji obíhají (zřejmě souvislost s kruhovou rychlostí) a tím delší je doba jejich oběhu.

Třetí Keplerův zákon.

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

Př. 5: Zapiš 3. Keplerův zákon vzorcem. Oběžnou dobu značíme T , hlavní poloosu a .

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních

poloos jejich trajektorií $\Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$.

Př. 6: Ověř platnost 3. Keplerova zákona na Zemi a libovolné další planetě sluneční soustavy.

Vzorec $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow$ na obou stranách poměry jedné veličiny \Rightarrow nemusíme převádět na základní jednotku, pokud v obou případech použijeme stejný násobek (například roky u času nebo astronomické jednotky u vzdáleností).

Jednou z planet je Země: $T = 1 \text{ rok}$, $a = 1 \text{ AU} \Rightarrow$ upravíme vzorec do tvaru: $\frac{T_Z^2}{a_Z^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$, po dosazení se levá strana rovná 1 \Rightarrow pravá strana se musí také rovnat jedné.

Merkur: $a = 0,387$, $T = 0,241$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{0,241^2}{0,387^3} = 1$.

Venuše: $a = 0,723$, $T = 0,615$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{0,615^2}{0,723^3} = 1$.

Mars: $a = 1,52$, $T = 1,88$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{1,88^2}{1,52^3} = 1$.

Jupiter: $a = 5,20$, $T = 11,9$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{11,9^2}{5,20^3} = 1$.

Saturn: $a = 9,56$, $T = 29,5$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{29,5^2}{9,56^3} = 1$.

Uran: $a = 19,3$, $T = 84,0$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{84,0^2}{19,3^3} = 1$.

Neptun: $a = 30,3$, $T = 168$, dosazení: $\frac{1^2}{1^3} = \frac{168^2}{30,3^3} = 1$.

Pedagogická poznámka: Je třeba si popovídat o převádění jednotek a úpravě vzorce na tvar, který usnadňuje ověření.

Př. 7: Odvoď 3. Keplerův zákon pro planety na kruhových drahách.

Pro každou planetu platí: $F_d = F_g$, na kruhové dráze pak platí $R = a$ (poloměr se rovná hlavní poloose).

$$m_p \frac{v^2}{a} = \kappa \frac{m_p m_s}{a^2}$$

$$v^2 = \kappa \frac{m_s}{a} \quad \text{Dosadíme: } v^2 = \left(\frac{s}{t}\right)^2 = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}.$$

$$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \kappa \frac{m_s}{a}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \kappa \frac{m_s}{4\pi^2} \Rightarrow \text{pravá strana je pro všechny planety stejná (jde pouze o konstanty a hmotnost$$

$$\text{Slunce)} \Rightarrow \text{pravá strana také musí být pro všechny planety stejná} \Rightarrow \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Shrnutí: