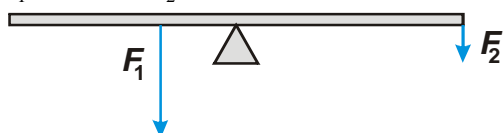


1.7.4 Rovnováha na páce I

Předpoklady: 1703

Př. 1: Urči momenty i výsledný moment sil na obrázku, pokud platí $F_1 = 60 \text{ N}$, $F_2 = 20 \text{ N}$, $r_1 = 0,3 \text{ m}$, $r_2 = 0,9 \text{ m}$.

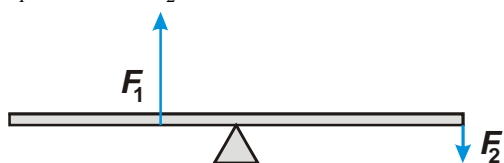


$$M_1 = F_1 r_1 = 60 \cdot 0,3 \text{ N} \cdot \text{m} = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = F_2 r_2 = 20 \cdot 0,9 \text{ N} \cdot \text{m} = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Síly na obrázku se snaží otáčet pákou v opačných směrech \Rightarrow jejich momenty se navzájem vyruší $\Rightarrow M_v = 0$.

Př. 2: Urči momenty i výsledný moment sil na obrázku, pokud platí $F_1 = 60 \text{ N}$, $F_2 = 20 \text{ N}$, $r_1 = 0,3 \text{ m}$, $r_2 = 0,9 \text{ m}$.



$$M_1 = F_1 r_1 = 60 \cdot 0,3 \text{ N} \cdot \text{m} = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = F_2 r_2 = 20 \cdot 0,9 \text{ N} \cdot \text{m} = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Síly na obrázku se snaží otáčet pákou ve stejném směru \Rightarrow jejich momenty se navzájem sčítají $\Rightarrow M_v = 36 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Rozdílné výsledky předchozích příkladů způsobuje vektorová podstata momentu síly.

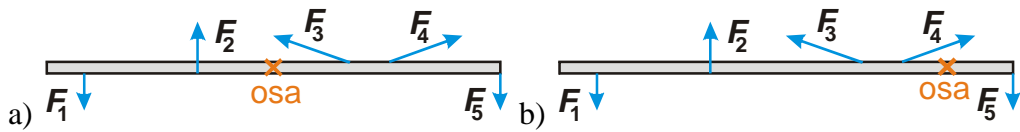
Znaménkovou konvenci zvolíme například podobně jako v matematice:

- moment síly, který otáčí páku ve směru hodinových ručiček, považujeme za záporný,
- moment síly, který otáčí páku proti směru hodinových ručiček, považujeme za kladný.

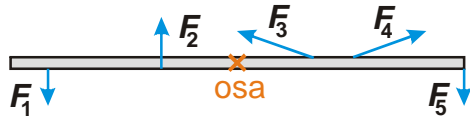
V případě, že budeme porovnávat momenty působící na páku, budeme na jednu stranu rovnosti vypisovat momenty působící ve směru hodinových ručiček a na druhou stranu momenty působící proti směru hodinových ručiček.

Pedagogická poznámka: Pokud nejdou první dva příklady mimořádně rychle, je lepší následující příklad udělat na tabuli, aby se neztrácelo moc času, který by pak chyběl na konec hodiny.

Př. 3: Urči znaménka momentů vyznačených sil. Osy otáčení jsou vždy vyznačeny křížkem.

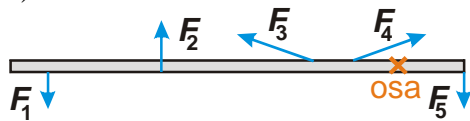


a)



- Moment otáčející páku proti směru hodinových ručiček ($M > 0$): síly F_1, F_3, F_4 .
- Moment otáčející páku po směru hodinových ručiček ($M < 0$): síly F_2, F_5 .

b)



- Moment otáčející páku proti směru hodinových ručiček ($M > 0$): síly F_1 .
- Moment otáčející páku po směru hodinových ručiček ($M < 0$): síly F_2, F_3, F_4, F_5 .

Př. 4: Na houpačce o délce 3 m, která je podložena ve svém středu, se chce houpat dítě o hmotnosti 15 kg a jeho tatínek o hmotnosti 75 kg. Urči, jak daleko od středu si musí na houpačku sednout tatínek, pokud dítě bude sedět na konci druhé strany.

$$l = 3 \text{ m}, m_d = 15 \text{ kg}, m_o = 75 \text{ kg}, r_o = ?$$

Dítě sedí na kraji $\Rightarrow r_d = 1,5 \text{ m}$.

Houpačka je v rovnováze, pokud se momenty obou sil rovnají: $M_d = M_o$.

$$F_d r_d = F_o r_o$$

$$m_d g r_d = m_o g r_o$$

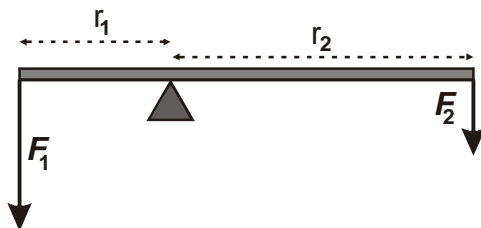
$$m_d r_d = m_o r_o \Rightarrow r_o = \frac{m_d r_d}{m_o} = \frac{15 \cdot 1,5}{75} \text{ m} = 0,3 \text{ m}$$

Otec si musí sednout 30 cm daleko od místa podložení houpačky.

Př. 5: Na vodorovnou páku o délce 1,5 m a zanedbatelné hmotnosti působí na koncích směrem kolmo dolů síly o velikostech 100 N a 200 N. Urči, ve kterém místě musí být páka podložena, aby byla v rovnováze.

Momenty obou sil musí být vzhledem k ose otáčení (tedy k místu podložení) stejné, tedy

$$M_1 = M_2 \Rightarrow M_1 = F_1 r_1 = M_2 = F_2 r_2.$$



Obě vzdálenosti musí dát dohromady celou délku páky $r_1 + r_2 = d \Rightarrow r_2 = d - r_1$.

$$F_1 r_1 = F_2 (d - r_1)$$

$$F_1 r_1 = F_2 d - F_2 r_1$$

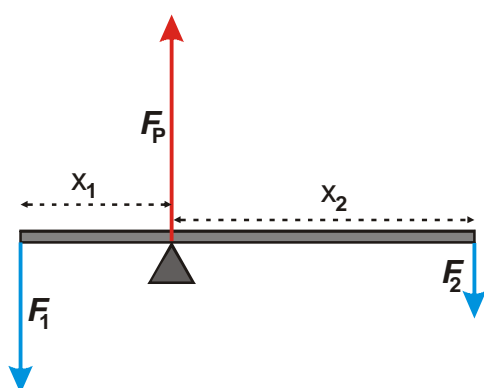
$$F_1 r_1 + F_2 r_1 = F_2 d$$

$$r_1 = \frac{F_2 d}{F_1 + F_2} = \frac{100 \cdot 1,5}{200 + 100} \text{ m} = 0,5 \text{ m}$$

Aby byla páka v rovnováze, musíme ji podepřít 0,5 m od konce, na který působí větší síla.

Pedagogická poznámka: Největším problémem v předchozím příkladu je vyjádření ramen, poměrně brzy na tento problém upozorním s tím, aby žáci hledali další vztahy pro ramena r_1 , r_2 .

Př. 6: Nakresli obrázek páky z předchozího příkladu a zakresli do něj všechny síly, které na páku působí. K silám zapiš jejich velikosti. Hmotnost páky zanedbej.



Kromě sil F_1 a F_2 musí na páku působit ještě síla směrem vzhůru (jinak by páka spadla dolů). Tato síla F_p působí v místě podložení, kolmo vzhůru (tlaková síla podložky). Pro velikost síly F_p musí platit:

$$F_p = F_1 + F_2 = 100 + 200 \text{ N} = 300 \text{ N}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu nechávám pouze chvíli na rozmyšlení, většina studentů ho řeší špatně, proto ho pak doděláváme na tabuli.

Př. 7: Nezmění dokreslení síly F_p do předchozího obrázku rovnováhu na páce? Proč?

Rovnováha na páce se nezmění, protože rameno síly F_p a tedy i její moment vůči ose otáčení je nulový.

Př. 8: Zformuluj podmínky, které musí být splněny, aby dokonale tuhé těleso zůstalo v klidu.

Těleso zůstává v klidu \Rightarrow

- nepohybuje se přímočarým pohybem \Rightarrow výslednice působících sil je nulová,
- nepohybuje se otáčivým pohybem \Rightarrow výsledný moment působících sil je nulový.

Dokonale tuhé těleso zůstává v klidu, právě když jsou výslednice i výsledný moment působících sil nulové.

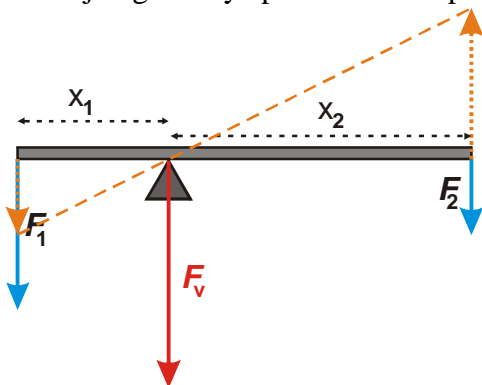
Př. 9: Na nehmotnou vodorovnou páku o délce 1,5 m působí na koncích směrem kolmo dolů síly o velikostech 100 N a 200 N. Najdi výslednici těchto dvou sil.

Další aplikace příkladu.

Výslednice sil F_1 , F_2 = síla, kterou můžeme obě síly nahradit \Rightarrow jde o sílu, která je opačná k síle F_p (působí ve vzdálenosti 0,5 m od síly F_1 silou 300 N kolmo dolů). Pokud síly F_1 a F_2 nahradíme silou $-F_p$ zůstane páka v klidu.

\Rightarrow Výslednici dvou rovnoběžných sil najdeme jako sílu opačnou k síle, která udrží pevné těleso v klidu.

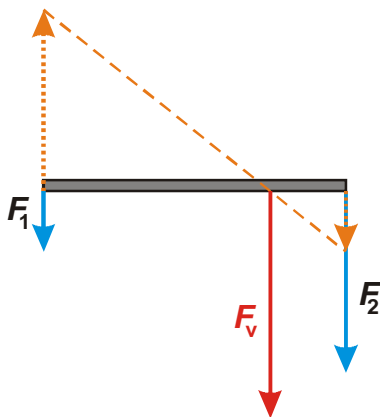
Existuje i grafický způsob hledání působíště výslednice dvou rovnoběžných sil.



Do obrázku nakreslíme ještě jednu síly F_1 a F_2 , tentokrát ale prohodíme jejich působíště a u jedné z nich změníme i orientaci (v tomto případě u síly F_1). Spojíme koncové body těchto sil a v místě, kde tato přímka protne páku, leží působíště výslednice. Její velikost se rovná součtu obou sil.

Př. 10: Na páku zanedbatelné hmotnosti působí 0,4 metru od sebe kolmo dolů síly $F_1 = 40$ N a $F_2 = 120$ N. Najdi jejich výslednici (velikost i působíště) graficky i počtně.

Grafické řešení:



Počtění řešení:

Obě síly působí stejným směrem \Rightarrow platí $F_v = F_1 + F_2 = 40 + 120$ N = 160 N.

Působíště najdeme jako místo, ve kterém by se měla nacházet osa, aby byla páka v rovnováze.

$$F_1 x_1 = F_2 x_2$$

$$F_1 x_1 = F_2 (0,4 - x_1)$$

$$F_1 x_1 = F_2 0,4 - F_2 x_1$$

$$F_1 x_1 + F_2 x_1 = F_2 0,4$$

$$x_1 = \frac{F_2 \cdot 0,4}{F_1 + F_2} = \frac{120 \cdot 0,4}{120 + 40} \text{ m} = 0,3 \text{ m}$$

Výslednice sil F_1 a F_2 je síla F o velikosti 160 N působící kolmo dolů ve vzdálenosti 0,3 m od působišťe síly F_1 (a 0,1 m od působišťe síly F_2).

Shrnutí: Dokonale tuhé těleso zůstává v klidu, když jsou výsledná síla i výsledný působící moment nulové.