

1.7.5 Rovnováha na páce II

Předpoklady: 1704

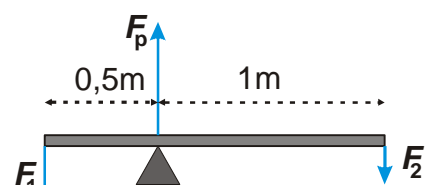
Pedagogická poznámka: Hodinu je možné dobře regulovat tím, kolika způsoby necháme některé příklady žáky počítat.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu nechám žáky nakreslit obrázek a bod a) děláme společně na tabuli. Teprve další body dělají žáci sami. Kamenem úrazu je nutnost v každém případě znovu promyslet velikost ramene síly. Rozhodně se neosvědčilo rozdělit žáky do skupin a nechat každou skupinu spočítat jeden bod.

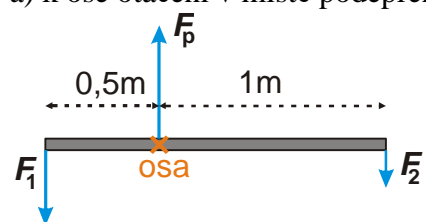
Př. 1: Na nehmotnou vodorovnou páku o délce 1,5 m působí na koncích směrem kolmo dolů síly o velikostech $F_1 = 200 \text{ N}$ a $F_2 = 100 \text{ N}$. Páka je podepřena ve vzdálenosti 0,5 m od síly F_1 , v bodě podepření působí na páku síla $F_p = 300 \text{ N}$ kolmo vzhůru.

Nakresli obrázek. Urči výsledný moment všech tří sil vzhledem:

- a) k ose otáčení v místě podepření, b) k ose otáčení na levém kraji páky,
c) k ose otáčení na pravém kraji páky, d) k ose otáčení uprostřed páky.



a) k ose otáčení v místě podepření



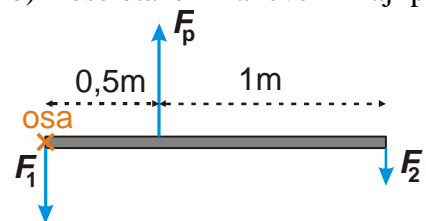
$$M_1 = F_1 r_1 = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (proti směru HR)}$$

$$M_p = 0 \text{ (rameno síly } F_1 \text{ je nulové)}$$

$$M_2 = F_2 r_2 = 100 \cdot 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (po směru HR)}$$

$$\mathbf{M} = M_1 + M_2 = 100 + (-100) \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) k ose otáčení na levém kraji páky



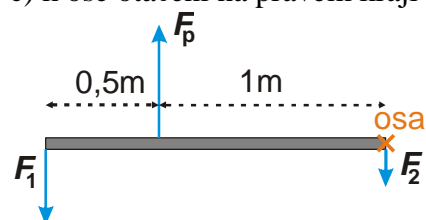
$$M_1 = 0 \text{ (rameno síly } F_1 \text{ je nulové)}$$

$$M_p = F_p r_p = 300 \cdot 0,5 \text{ N} \cdot \text{m} = 150 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (proti směru HR)}$$

$$M_2 = F_2 r_2 = 100 \cdot 1,5 \text{ N} \cdot \text{m} = 150 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (po směru HR)}$$

$$\mathbf{M} = M_1 + M_2 = 150 + (-150) \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) k ose otáčení na pravém kraji páky,



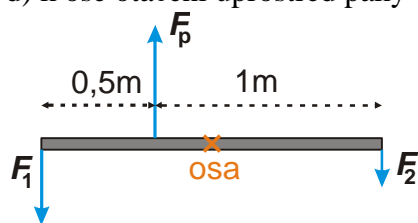
$$M_1 = F_1 r_1 = 200 \cdot 1,5 \text{ N} \cdot \text{m} = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (proti směru HR)}$$

$$M_p = F_p r_p = 300 \cdot 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (po směru HR)}$$

$$M_2 = 0 \text{ (rameno síly } F_2 \text{ je nulové)}$$

$$\mathbf{M} = M_1 + M_p = 300 + (-300) \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) k ose otáčení uprostřed páky



$$M_1 = F_1 r_1 = 200 \cdot 0,75 \text{ N} \cdot \text{m} = 150 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (proti směru HR)}$$

$$M_p = F_p r_p = 300 \cdot 0,25 \text{ N} \cdot \text{m} = 75 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (po směru HR)}$$

$$M_2 = F_2 r_2 = 100 \cdot 0,75 \text{ N} \cdot \text{m} = 75 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (po směru HR)}$$

$$M = M_1 + M_p + M_2 = 150 + (-75) + (-75) \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Součet momentů všech sil, které na páku působí a udržují ji v rovnováze, je nulový vůči libovolně zvolené ose.

Jak je možné, že platí předchozí pravidlo a zároveň je houpačka s otcem a dítětem vyrovnaná pouze v případě, že otec si sedne vzhledem k místu podložení na přesně určené místo?

Při výpočtu rovnováhy houpačky na začátku minulé hodiny jsme vůbec neuvažovali působení síly F_p , která působí v místě podložení. Její moment je nulový pouze vzhledem k místu podložení (v něm je její působíště) \Rightarrow vzhledem k jiné ose by tato síla nešla zanedbat \Rightarrow proto jsme momenty působících sil určovali vzhledem k místu podložení (vůči jiné ose by náš postup se zanedbáním síly F_p nefungoval).

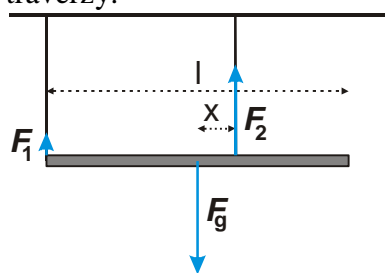
Pokus: Na konce vodorovné tyčky zavěšíme dva siloměry. Držíme v rukou siloměry, na kterých visí tyčka \Rightarrow na tyčku působí síly siloměrů a gravitační síla. Druhý experimentátor může tyčku zatížit v libovolném místě \Rightarrow změní se síly, kterými na tyčku působí siloměry. Když zanedbáme gravitační sílu působící na tyčku, jde o stejnou situaci (zrcadlově převrácenou) jako v předchozím příkladě. Jen se nezdá, že by místo, kde tyčku zatěžujeme, bylo něčím zvláštní (že by se tyčka musela otáčet zrovna okolo něj), osu otáčení si můžeme představit kdekoli a vůči každé takové ose je výsledný moment nulový.

\Rightarrow **Pokud počítáme rovnováhu na páce a bereme v úvahu všechny působící síly, můžeme si zvolit osu otáčení libovolně (nejlépe tak, aby byl výpočet snazší).**

Dodatek: Předchozí věta v žádném případě neznamená, že můžeme osu volit v případech, kdy nevíme, že je výsledný moment nulový.

Př. 2: Traverza o hmotnosti 150 kg a délce 2 m je zavěšena na dvou lanech. První je umístěno na kraji. Urči místo, kde je k traverze připevněno druhé lano, jestliže první lano (lano na kraji) napíná síla 300 N.

Musíme určit dvě veličiny – velikost druhé síly F_2 a vzdálenost jejího působíště od kraje traverzy.



Na traverzu působí tři síly:

- směrem vzhůru síly lan F_1, F_2 ,
- směrem dolů gravitační síla F_g .

Výsledná síla působící na traverzu musí být nulová \Rightarrow platí $F_g = F_1 + F_2$.

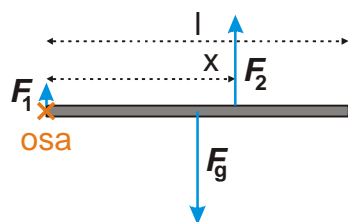
$$F_2 = F_g - F_1 = 1500 - 300 \text{ N} = 1200 \text{ N}$$

Místo připevnění druhého lana (působíště druhé síly), určíme pomocí momentů.

Výsledný moment všech působících sil je nulový \Rightarrow můžeme si libovolně zvolit osu.

Tři výhodné možnosti:

Levý okraj traverzy (působíště síly F_1)



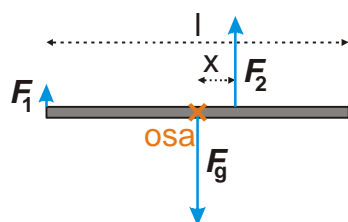
$$M_1 = 0.$$

$$M_{F_g} = F_g \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_2 = F_2 \cdot x$$

$$M_{F_g} = M_2 \Rightarrow F_g \cdot \frac{l}{2} = F_2 \cdot x \Rightarrow x = \frac{F_g l}{2F_2} = \frac{1500 \cdot 2}{2 \cdot 1200} \text{ m} = 1,25 \text{ m}$$

Střed traverzy (působíště síly F_g)



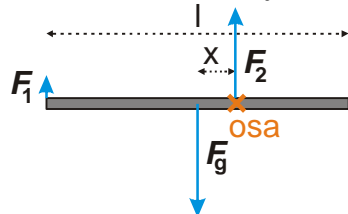
$$M_1 = F_1 \cdot \frac{l}{2}.$$

$$M_{F_g} = 0$$

$$M_2 = F_2 \cdot x$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow F_1 \cdot \frac{l}{2} = F_2 \cdot x \Rightarrow x = \frac{F_1 l}{2F_2} = \frac{300 \cdot 2}{2 \cdot 1200} \text{ m} = 0,25 \text{ m}$$

Působíště druhé síly



$$M_1 = F_1 \left(\frac{l}{2} + x \right).$$

$$M_{F_g} = F_g \cdot x$$

$$M_2 = 0$$

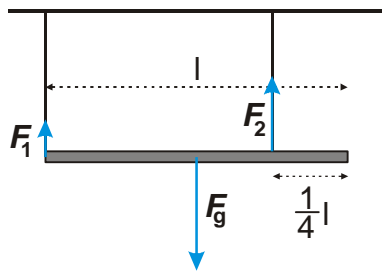
$$M_1 = M_{F_g} \Rightarrow F_1 \left(\frac{l}{2} + x \right) = F_g \cdot x$$

$$F_1 \cdot \frac{l}{2} + F_1 \cdot x = F_g \cdot x$$

$$F_1 \cdot \frac{l}{2} = x(F_g - F_1) \Rightarrow x = \frac{F_1 l}{2(F_g - F_1)} = \frac{300 \cdot 2}{2 \cdot (1500 - 300)} \text{ m} = 0,25 \text{ m}$$

Druhé lano je připevněno ve vzdálenosti 1,25 m od kraje s prvním lanem.

Př. 3: Traverza o hmotnosti 450 kg a délce 3 m je zavěšena na dvou lanech. První je umístěno na kraji a druhé ve třech čtvrtinách délky. Urči síly, kterými traverza lana napíná.



Na traverzu působí tři síly:

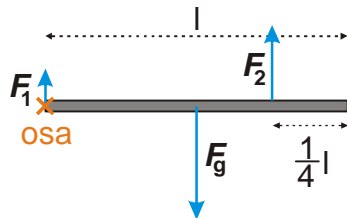
- směrem vzhůru síly lan F_1 , F_2 ,
- směrem dolů gravitační síla F_g .

Musíme určit dvě neznámé – velikosti obou sil F_1 a $F_2 \Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice:

- Výsledná síla působící na traverzu musí být nulová \Rightarrow platí $F_g = F_1 + F_2$.
- Moment všech působících sil musí být nulový (konkrétní rovnice záleží na volbě osy otáčení).

Tři výhodné možnosti:

Levý okraj traverzy (působíště síly F_1)



$$M_1 = 0.$$

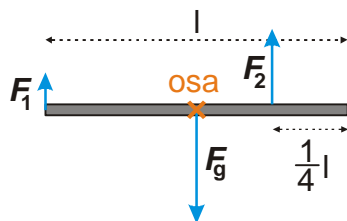
$$M_{F_g} = F_g \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_2 = F_2 \cdot \frac{3}{4}l$$

$$M_{F_g} = M_2 \Rightarrow F_g \cdot \frac{l}{2} = F_2 \cdot \frac{3}{4}l \Rightarrow F_2 = \frac{F_g \cdot \frac{l}{2}}{\frac{3}{4}l} = F_g \cdot \frac{2}{3} = 4500 \cdot \frac{2}{3} \text{ N} = 3000 \text{ N}$$

$$F_g = F_1 + F_2 \Rightarrow F_1 = F_g - F_2 = 4500 - 3000 \text{ N} = 1500 \text{ N}$$

Střed traverzy (působíště síly F_g)



$$M_1 = F_1 \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_{F_g} = 0$$

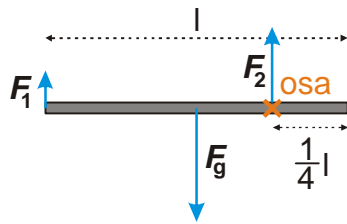
$$M_2 = F_2 \cdot \frac{1}{4}l$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow F_1 \cdot \frac{l}{2} = F_2 \cdot \frac{l}{4} \Rightarrow 2F_1 = F_2$$

$$\text{Dosadíme do druhé rovnice: } F_g = F_1 + F_2 = F_1 + 2F_1 = 3F_1 \Rightarrow F_1 = \frac{F_g}{3} = \frac{4500}{3} \text{ N} = 1500 \text{ N}$$

$$F_2 = 2F_1 = 2 \cdot 1500 \text{ N} = 3000 \text{ N}$$

Působíště druhé síly



$$M_1 = F_1 \frac{3l}{4}$$

$$M_{F_g} = F_g \frac{1}{4}$$

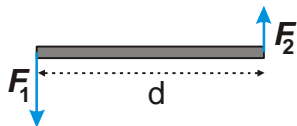
$$M_2 = 0$$

$$M_1 = M_{F_g} \Rightarrow F_1 \frac{3l}{4} = F_g \frac{1}{4}$$

$$F_1 = \frac{F_g}{3} = \frac{4500}{3} \text{ N} = 1500 \text{ N}$$

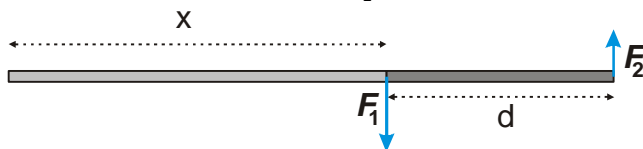
$$F_g = F_1 + F_2 \Rightarrow F_2 = F_g - F_1 = 4500 - 1500 \text{ N} = 3000 \text{ N}$$

Př. 4: Na obrázku je nakreslena páka, na kterou působí síly F_1 a F_2 . Urči výslednici těchto dvou sil pomocí síly, která uvede páku do rovnováhy. $F_1 = 40 \text{ N}$, $F_2 = 25 \text{ N}$, $d = 1,2 \text{ m}$.



Problém: Obě síly se snaží otočit pákou stejným směrem (pokud uvažujeme o ose otáčení mezi oběma silami) \Rightarrow jejich momenty se neodečtou (mají stejné znaménko).

Řešení: Pokud bude osa otáčení mimo páku (nebude mezi oběma silami), momenty budou mít opět různá znaménka \Rightarrow prodloužujeme na straně u větší síly F_1 , aby byla blíže k ose otáčení. Vůči ose, která leží na této prodloužené části páky, otáčí síla F_1 pákou po směru hodinových ručiček a síla F_2 proti směru hodinových ručiček.



$$M_1 = F_1 x \quad M_2 = F_2 (d + x)$$

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 x = F_2 (d + x)$$

$$F_1 x = F_2 d + F_2 x$$

$$F_1 x - F_2 x = F_2 d$$

$$x(F_1 - F_2) = F_2 d$$

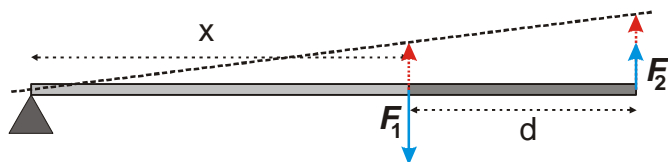
$$x = \frac{F_2 d}{(F_1 - F_2)} = \frac{25 \cdot 1,2}{40 - 25} \text{ m} = 2 \text{ m}$$

Páku musíme podepřít po prodloužení ve vzdálenosti 2 m od konce, na který působí síla F_1 .

Velikost síly: $F = F_1 - F_2$.

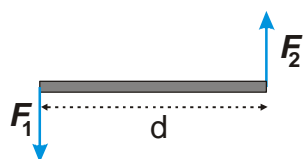
Výslednice je síla opačná k síle F .

Grafický způsob hledání výslednice:



Do obrázku nakreslíme ještě jednu síly F_1 a F_2 , tentokrát ale prohodíme jejich působišťe a u jedné z nich změním i orientaci (v tomto případě u síly F_1). Spojíme koncové body těchto sil a v místě, kde tato přímka protne páku, leží působišťe výslednice. Její velikost se rovná rozdílu obou sil.

Př. 5: Na konce páky o délce d působí dvě rovnoběžné opačně orientované síly o stejné velikosti. Urči jejich výslednici.



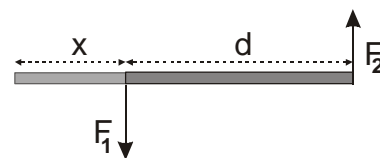
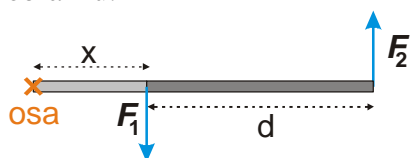
Problémy:

- Nevíme, kde prodloužit páku, nemáme stranu s větší silou,
- výslednice by měla být nulová, ale musí mít nenulový otáčivý účinek.

⇒ U těchto dvou sil nemůžeme určit výslednici.

Dvojice rovnoběžných opačně orientovaných sil stejné velikosti se nazývá **dvojice sil**, jejich vzdálenost se nazývá rameno dvojice sil. Dvojice sil nemá žádný posuvný účinek (síly se odečtou), má však nenulový otáčivý účinek – moment dvojice sil.

Zkusíme ho určit, vůči nějaké ose, například ose zvolené na obrázku.



Momenty obou sil mají opačné směry, takže je musíme odečíst.

$$M_1 = F_1 x = Fx \qquad M_2 = F_2 (d + x) = F(d + x)$$

$$M = M_2 - M_1 = F(d + x) - Fx = Fd + Fx - Fx = Fd$$

Zajímavý výsledek, v konečném vzorci se vůbec neobjevuje vzdálenost x ⇒ moment dvojice sil je stejný vzhledem k libovolné ose.

Moment dvojice sil má vzhledem k libovolné ose velikost $M = Fd$ (někdy se píše i $D = Fd$).

O vytvoření dvojice sil se snažíme vždy, když chceme, aby se předmět otáčel a při tom se nepohyboval posuvným pohybem - například při utahování šroubů nebo otáčení koly. Pokud na těleso působí dvojice sil, můžeme dosáhnout otáčivého účinku bez namáhání osy, na které je upevněno.

Volant automobilu:

- Pokud volant otáčíme oběma rukama stejně silně ⇒ vytváříme dvojici sil ⇒ na volant tak nemusí působit osa (jako u klauna, který předstírá, že řídí auto pouze se samotným volantem).

- Otáčíme volantem jednou rukou \Rightarrow dvojice sil musí vzniknout také (volant se pouze otáčí a nepohybuje posuvným pohybem) \Rightarrow na volant působí jeho osa (a tím se vyvrací) \Rightarrow vznikne opět dvojice sil, která však působí v menší vzájemné vzdálenosti a má tedy menší moment (pokud chceme dosáhnout stejného momentu, musíme působit rukou dvakrát větší silou).

Obecně se snažíme vždy co nejvíce bránit situacím, kdy osa musí působit na otáčející předmět (tím se opotřebovává) \Rightarrow vyvažování (kola, rotory cirkulárek, soustruhů, turbín, ...).

Shrnutí: Pokud je páka v rovnováze, je v rovnováze vůči libovolně zvolené ose otáčení.