

1.7.10 Moment setrvačnosti

Předpoklady: 1706

Vrátíme se k našemu původnímu cíli – doplnění pravé části tabulky.

posuvný pohyb	otáčivý pohyb
příčina změny pohybu: síla F [N]	příčina změny pohybu: moment síly M [N·m], $M = Fr \sin \alpha$
odpor ke změně přímočarého pohybu: hmotnost m [kg]	
1. Newtonův zákon: $F_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.	Momentová věta: $M_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v rovnoměrném otáčivém pohybu.
2. Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$.	

Potřebujeme najít veličinu, která udává odpor tělesa ke změně otáčivého pohybu. Této veličině se analogicky s momentem síly říká **moment setrvačnosti** (vzhledem k ose otáčení) a značí se J .

Př. 1: Najdi veličiny, na kterých závisí moment setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k ose otáčení, která přes něj neprochází. Navrhni vzorec pro výpočet.

Podle zkušeností s kolotočem. Větší odpor k roztáčení má kolotoč, který:

- má velkou hmotnost,
- hmotnost je umístěna daleko od osy otáčení.

⇒ vzorec $J = mr^2$.

Výsledek předchozího příkladu je sice na první pohled logický, ale je nesprávný.

Prozkoumáme nejjednodušší příklad.

Malá těžká kulička se kutálí po stole, je přidělaná k provázku. Na kuličku působí síla kolmá k provázku, která kuličku uděluje zrychlení.

Pohyb kuličky můžeme popisovat dvěma způsoby:

- Na kuličku o hmotnosti m působí síla F , která jí uděluje zrychlení $a = \frac{F}{m}$.
- Na kuličku o momentu setrvačnosti J působí moment síly M , který jí uděluje úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{M}{J}$.

Zkusíme jeden vztah převést na druhý: $\varepsilon = \frac{M}{J}$,

převědeme ε a M na přímočaré veličiny: $\frac{a}{r} = \frac{Fr}{J} \quad / \cdot J \cdot r$,

vypočteme J : $Ja = Fr^2 \Rightarrow J = \frac{F}{a} r^2 = mr^2$.

Dodatek: Vztah pro moment setrvačnosti i přímým převedením na 2. Newtonův zákon.

$$\frac{a}{r} = \frac{Fr}{J} \quad / \cdot J$$

$$a = \frac{Fr^2}{J} = \frac{F}{\frac{J}{r^2}} = \frac{F}{m} \Rightarrow \text{platí: } \frac{J}{r^2} = m \Rightarrow J = mr^2.$$

Odpor k roztáčení udává **moment setrvačnosti** J . Jednotkou momentu setrvačnosti je $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m vzdáleného r od osy otáčení je určen vztahem $J = mr^2$.

Konečně můžeme doplnit tabulku:

posuvný pohyb	otáčivý pohyb
příčina změny pohybu: síla F [N]	příčina změny pohybu: moment síly M [N·m], $M = Fr \sin \alpha$
odpor ke změně přímočarého pohybu: hmotnost m [kg]	odpor ke změně rotačního pohybu: moment setrvačnosti J [kg·m ²], $J = mr^2$
1. Newtonův zákon: $F_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.	Momentová věta: $M_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v rovnoměrném otáčivém pohybu.
2. Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$.	$\varepsilon = \frac{M}{J}$

Př. 2: Brusný kotouč má tvar velmi nízkého válce s poloměrem r a hmotností m . Je možné vypočítat moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose otáčení procházející jeho středem kolmo k podstavám podle vzorce $J = mr^2$? Proč?

Není, vzorec $J = mr^2$ platí pro hmotný bod. Když si „rozdělíme“ kotouč na jednotlivé kousky, zjistíme, že pouze některé jsou od osy vzdáleny r . Většina je k ose blíže \Rightarrow skutečná hodnota momentu setrvačnosti bude nižší než hodnota spočtená ze vzorce $J = mr^2$.

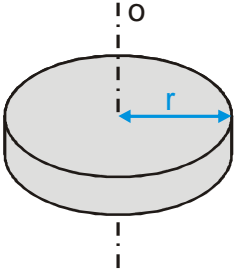
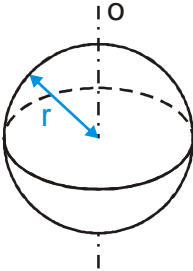
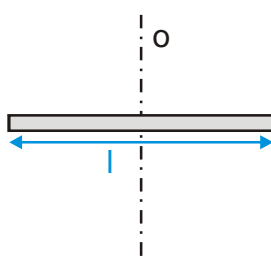
Př. 3: Najdi těleso, jehož moment setrvačnosti je možné s dostatečnou přesností určit vzorcem $J = mr^2$.

Všechny části tělesa musí být od osy otáčení vzdáleny o $r \Rightarrow$ jde o obruč.

Pro ostatní tělesa musíme určit celkový moment sčítáním momentů jednotlivých dílků (tento matematický postup se nazývá integrace).

Hodnoty momentu setrvačnosti pro některá pravidelná tělesa vzhledem k osám procházejícím těžištěm.

kotouč	koule	tyč
---------------	--------------	------------

		
$J = \frac{1}{2}mr^2$	$J = \frac{2}{5}mr^2$	$J = \frac{1}{12}ml^2$

Pedagogická poznámka: Ideální by v tomto okamžiku bylo neukazovat žákům Steinerovu větu, zadat čtvrtý příklad a dát jim k dispozici internet. Je to krásná ukázka toho, že okřídlené "já to najdu na internetu" je pro mnohé žáky (zejména ty slabší) pouze zbožným přáním.

Výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k ose, která neprochází těžištěm, umožňuje **Steinerova věta:** Jestliže moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm se rovná J_0 , m je hmotnost tělesa a a je vzdálenost osy o od těžiště, je moment setrvačnosti vzhledem k ose o určen vztahem $J = J_0 + ma^2$.

Př. 4: Urči moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose, která prochází:
a) koncem tyče. b) jednu třetinu délky tyče od kraje.

a) Osa je od těžiště ve středu vzdálena o $\frac{l}{2} \Rightarrow$ dosadíme do Steinerovy věty:

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} = m\frac{4l^2}{12} = \frac{1}{3}ml^2$$

b) Osa je od těžiště ve středu vzdálena o $\frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{3l - 2l}{6} = \frac{l}{6} \Rightarrow$ dosadíme:

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{36} = ml^2 \cdot \left(\frac{3}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{9}ml^2$$

Setrvačnick malé vodní elektrárny o váze 3 tuny má tvar kružnice s průměrem 2,6 m a vzhledem k průměru se zanedbatelnou tloušťkou. Při normálním provozu se otočí jednou za dvě sekundy. Urči sílu, kterou musí být napnut řemen, který roztáčí setrvačnick, jestliže je veden přímo přes vnější stranu setrvačnicku a koeficient tření mezi setrvačnickem a řemenem je 0,7. Setrvačnick se musí roztočit na plnou rychlost za 30 s. [FB1]

Jojo se odvíjí z provázku a sjíždí dolů. [TB2]

Shrnutí: Odpor tuhého tělesa vůči roztáčení vyjadřuje veličina moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení $J = mr^2$ (pro hmotný bod nebo obruč).