

1.7.11 Dynamika otáčivého pohybu tuhého tělesa

Předpoklady: 1710

S momentem setrvačnosti můžeme pokračovat v doplňování tabulky.

posuvný pohyb	otáčivý pohyb
„množství pohybu v tělese“: hybnost $p = mv$ $[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	„množství pohybu v tělese“: moment hybnosti $L = J\omega$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
Impulsová věta: $m \cdot v = \text{konstanta}$	$J \cdot \Delta\omega = M \cdot \Delta t$
Zákon zachování hybnosti: $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$	Zákon zachování momentu hybnosti: $J \cdot \omega = \text{konstanta}$

Př. 1: Roztoč se na otáčejícím se křesle s roztaženými nohama. Přitáhni nohy a ruce k sobě. Jak se změní rychlost otáčení? Vysvětli.

Po přitáhnutí nohou a rukou k tělu se rychlost otáčení zvýší. Po jejich opětovném oddálení se rychlost otáčení sníží.

Zřejmě jde o důsledek zákona zachování momentu hybnosti (při přitahování a odtahování nohou nepůsobí žádné vnější síly).

- Nohy od těla \Rightarrow velká hmotnost je umístěna daleko od osy otáčení \Rightarrow tělo má velký moment setrvačnosti.
- Přitáhneme nohy a ruce k tělu \Rightarrow zmenší se vzdálenost od osy otáčení \Rightarrow zmenší se moment setrvačnosti \Rightarrow pokud se má zachovat moment hybnosti, musí se zvětšit rychlost otáčení.

Při oddálení nohou probíhá opětný děj \Rightarrow rychlost otáčení se zmenší.

Stejný fyzikální zákon využívají krasobruslaři při provádění piruet: [pirueta](#).

Záhada s kolem http://www.youtube.com/watch?v=pF_SUvPAOSs (0:50).

Roztočené kolo se otáčí ve vodorovné rovině, i když ho zavěsíme pouze na jednu stranu osičky. Proč ho gravitace nezhoupne dolů stejně, jako když se netočí?

Ke změně směru momentu hybnosti je nutná síla působící ve vodorovné rovině (ucítíme její reakci, když se kolo pokusíme naklonit) \Rightarrow žádná taková síla na kolo nepůsobí (pouze gravitace svisle dolů) \Rightarrow nemění se moment hybnosti kola \Rightarrow nemění se osa, kolem které se kolo točí \Rightarrow kolo se nezhoupne a "stojí" ve vzduchu.

Stejný efekt:

- drží ve svislé poloze káču,
- zvyšuje naši stabilitu při jízdě na kole,
- udržuje směr letu kulky při výstřelu (kulku roztočí drážkování v hlavni),
- využívá se v gyroskopu.

Gyroskop

Rotující setrvačnick zachovává osu otáčení a tedy i původní směr:

- navigace (letadla, kosmické sondy, balistické rakety),
- zaměřování (dalekohledy, děla).

http://www.youtube.com/watch?v=cquvA_IpEsA (1:30)

Př. 2: Doplň poslední řádku tabulky s otáčivou analogií kinetické energie.

<p>energie v pohybu tělesa: kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ [J]</p>	<p>Energie v otáčení tělesa: kinetická energie rotačního pohybu: $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ [J]</p>
---	--

Dynamika (proč se to pohybuje)

posuvný pohyb	otáčivý pohyb
příčina změny pohybu: síla F [N]	příčina změny pohybu: moment síly M [N·m], $M = Fr \sin \alpha$
odpor ke změně přímočarého pohybu: hmotnost m [kg]	odpor ke změně rotačního pohybu: moment setrvačnosti J [kg·m ²], $J = mr^2$
1. Newtonův zákon: $F_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.	Momentová věta: $M_v = 0$, právě když je těleso v klidu nebo v rovnoměrném otáčivém pohybu.
2. Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$.	$\varepsilon = \frac{M}{J}$
„množství pohybu v tělese“: hybnost $p = mv$ [kg·m·s ⁻¹]	„množství pohybu v tělese“: moment hybnosti $L = J\omega$ [kg·m ² ·rad·s ⁻¹]
Impulsová věta: $m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t$	$J \cdot \Delta \omega = M \cdot \Delta t$
Zákon zachování hybnosti: $m \cdot v = \text{konstanta}$	Zákon zachování momentu hybnosti: $J \cdot \omega = \text{konstanta}$
energie v pohybu tělesa: kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ [J]	energie v otáčení tělesa: kinetická energie rotačního pohybu: $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ [J]

Př. 3: energii potřebnou k pohybu je možné uskladnit v rotujícím setrvačnicku. Navrhni, jak by měl být zkonstruován.

Kinetická energie rotačního pohybu $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 \Rightarrow$ setrvačnick by měl mít:

- velkou hmotnost,
- hmotu umístěnou, co nejdále od osy otáčení,
- vysoké otáčky.

Například u autíček na setrvačnick se používá těžký tenký válec s velkým průměrem, zpřevodovaný tak, aby se otáčel rychleji než kola autíčka (když rychlost otáčení setrvačnicku zvětšíme dvakrát, jeho energie se zvětší čtyřikrát).

Př. 4: Urči kinetickou energii otáčivého pohybu kotouče cirkulárky, jestliže se otáčí s frekvencí 50 Hz a má hmotnost 0,5 kg a průměr 30 cm.

$$f = 50 \text{ Hz}, m = 0,5 \text{ kg}, d = 30 \text{ cm} \Rightarrow r = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}, E_k = ?$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2, \text{ dosadíme } J = \frac{1}{2} m r^2 \text{ (kotouč)}, \omega = 2\pi f.$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 (2\pi f)^2 = \frac{1}{4} m r^2 4\pi^2 f^2 = m (r\pi f)^2 = 0,5 (0,15 \cdot \pi \cdot 50)^2 \text{ J} = 280 \text{ J}$$

Kotouč cirkulárky má energii 280 J.

Př. 5: Kdy má člověk točící se na kolečkovém křesle větší rotační kinetickou energii? Když se točí pomaleji s nataženými nohama nebo když se točí rychleji s nohama pod sebou?

Při točení na židli platí zákon zachování hybnosti $J\omega = \text{konstanta}$, v našem konkrétním případě můžeme napsat $J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$.

- Kinetická energie při pomalém otáčení: $E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1 \cdot \omega_1$.
- Kinetická energie při rychlém otáčení: $E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2 \cdot \omega_2$.

Červeně vyznačené části vzorců se rovnají, protože platí $\omega_1 < \omega_2$, musí platit i $E_1 < E_2$ (energie při pomalém otáčení je menší).

Jiné vysvětlení:

- Pokud přibližujeme ruce k tělu, musíme konat práci (svaly působí silou směrem k ose otáčení proti samovolné snaze rukou pokračovat rovnoměrně přímočaře od osy) \Rightarrow energie otáčivého pohybu se zvětšuje $\Rightarrow E_2 > E_1$.
- Pokud ruce odtahujeme od těla, práci nekonáme (ruce se samovolně dodržováním 1. Newtonova zákona snaží pohybovat rovnoměrně a tím se od osy vzdálit) \Rightarrow práce se musí konat na úkor kinetické energie otáčivého pohyb \Rightarrow energie otáčivého pohybu se zmenšuje $\Rightarrow E_1 > E_2$.

Př. 6: V malých vodních elektrárnách nepohání vodní turbína přímo generátor střídavého proudu, ale těžký setrvačnick, na který je pak připojen generátor. Vysvětli, proč je zapojení takto složité.

Těžký setrvačnick se snaží uchovat si svou rychlost otáčení (zachovává svůj moment hybnosti) \Rightarrow může chvilkově nahradit pokles výkonu turbíny nebo zajistit dodatečný výkon při zvýšeném odběru ze sítě.

Př. 7: Oblíbeným scénářem SCI-FI je srážka Země s velkým asteroidem. Kromě jiných katastrof by mohla způsobit také změnu rotace Země okolo své osy (změna rychlosti

nebo změna směru zemské osy). Jak by se změnila délka dne, kdyby do Země v nejuvhodnějším směru narazil asteroid? Odvoďte obecný vzorec a určete výsledek pro různé hmotnosti a rychlosti případných asteroidů.

Během srážky mezi asteroidem a Zemí působí pouze vzájemné síly \Rightarrow platí zákon zachování momentu hybnosti. Největší zbrždění rotace způsobí asteroid, který narazí do rovníku kolmo na směr zemského poloměru proti směru zemské rotace.

Moment hybnosti před srážkou: $J_Z \omega_Z - J_A \omega_A$ (asteroid letí proti směru rotace).

Moment hybnosti po srážce: $(J_Z + J_A) \omega$.

Platí zákon zachování momentu hybnosti: $J_Z \omega_Z - J_A \omega_A = (J_Z + J_A) \omega$.

Dosadíme: $J_Z = \frac{2}{5} m_Z r_Z^2$ (Země má tvar koule), $J_A = m_A r_Z^2$ (asteroid je v okamžiku dopadu

hmotný bod, vzdálený r_Z od osy otáčení ve středu Země), $\omega_A = \frac{v_A}{r_Z}$ (úhlovou rychlost

asteroidu vyjádříme z rychlosti jeho dopadu na Zem).

$$\frac{2}{5} m_Z r_Z^2 \omega_Z - m_A r_Z^2 \frac{v_A}{r_Z} = \left(\frac{2}{5} m_Z r_Z^2 + m_A r_Z^2 \right) \omega$$

$$r_Z \left(\frac{2}{5} m_Z r_Z \omega_Z - m_A v_A \right) = r_Z^2 \left(\frac{2}{5} m_Z + m_A \right) \omega \quad / \cdot 5$$

$$(2m_Z r_Z \omega_Z - 5m_A v_A) = r_Z (2m_Z + 5m_A) \omega$$

$$\frac{2m_Z r_Z \omega_Z - 5m_A v_A}{r_Z (2m_Z + 5m_A)} = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r_Z (2m_Z + 5m_A)}{2m_Z r_Z \omega_Z - 5m_A v_A}$$

Shrnutí: Zavedení momentu setrvačnosti nám pro otáčivý pohyb umožňuje rychle nalézt analogie zákonů pro posuvný pohyb.