

1.8.8 Proudění tekutin, rovnice kontinuity

Předpoklady: 010805

Pomůcky: voda, tuž, vysoká kádinka, necezený čaj, pokus na hydrodynamické paradoxon.

Zatím jsme zkoumali tekutiny v klidu. Jak je to s jejich pohybem?

Dosud zkoumané pohyby:

- **pohyb hmotného bodu:** zanedbávali jsme rozměry, pohyb předmětu jsme zjednodušili na pohyb jednoho bodu,
- **pohyb tuhého tělesa:** rozměry a tvar předmětu v průběhu pohybu se nemění.

Pokusy:

- kápneme tuž do vody: objevují se krásné neustále se měnící „obláčky“, kapalina jako celek se nepohybuje, pohybují se jednotlivé kousky kapaliny
- zamíchání necezeného čaje: kapalina stojí, jednotlivé kousky se chaoticky pohybují,
- šlápnutí do odkalené louže: podobný obrázek jako u tuže,
- proud řeky v prudším místě s kameny v korytu: voda se pohybuje, obrázek se každou chvílí mění (víry, vlny, zpěněná místa).

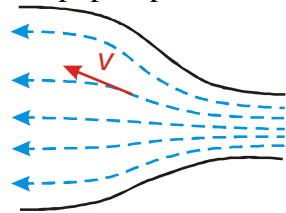
⇒ Pohyb tekutin (nemají stálý tvar):

- musíme popisovat jako pohyb jejich částí,
- je strašně složitý (nad lidské možnosti jak početně, tak kvůli nedostatečně znalosti počátečních podmínek).

⇒ Budeme se zabývat pouze skromnými, reálnými cíli: pohyb tekutin s převažujícím směrem - **proudění**.

Nejjednodušší případ proudění: voda teče pomalu trubicí: rychlosti jednotlivých kousíčků vody se během pohybu mění, ale částičky se na jednom místě pohybují stále stejnou rychlostí ⇒ "obraz pohybu" se s časem nemění ⇒ **ustálené (stacionární) proudění**.

Jak popsat proudění?

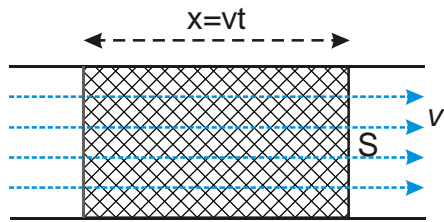


Modré čáry: trajektorie částic tekutiny – **proudnice**.

- Proudnice: tečna v libovolném místě, má směr rychlosti.
- Proudnice ustáleného proudění: proudění se s časem nemění ⇒ proudnice se také nemění, z každého bodu jediná proudnice, do každého bodu jediná proudnice ⇒ proudnice se neprotínají.

Budeme předpokládat ustálené proudění ideální (dokonale tekuté a nestlačitelné) kapaliny většinou uvnitř uzavřené trubice.

Jaké množství kapaliny proteče?



Trubice s průřezem S : tekutina proudí rychlosti $v \Rightarrow$ za čas t urazí vzdálenost $x = vt \Rightarrow$ objem tekutiny, která protekla trubicí ve zkoumaném místě $V = Sx = Svt$.

Objem spotřebované vody měří vodoměry, objem plynu plynoměry.

Jaký je průtok (nezávisí na době, po kterou trubicí sledujeme)?

Objemový průtok: $Q_v = \frac{V}{t} = \frac{Svt}{t} = Sv$, jednotka $Q_v = Sv = \text{m}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ kubický metr za sekundu (lidově kubík za sekundu).

Př. 1: Ropovod IKL přivádí do České republiky a SRN arabskou ropu. Urči, kolik tun může ropovodem za rok přitéci, pokud průměr potrubí je 714 mm a ropa v něm může proudit maximální rychlostí $1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hustota přiváděné ropy kolísá okolo $850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$$d = 714 \text{ mm} \Rightarrow r = 0,36 \text{ m}, v = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \rho = 850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, t = 1 \text{ rok} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}, m = ?$$

$$\text{Objemový průtok: } Q_v = Sv = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 0,36^2 \cdot 1,2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 0,49 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Přepravená ropa ze 1 rok: } V = Q_v \cdot t = 0,49 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ m}^3 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m}^3$$

$$\text{Hmotnost přepravené ropy: } m = V\rho = 1,5 \cdot 10^7 \cdot 850 \text{ kg} = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ kg} = 1,3 \cdot 10^7 \text{ t}$$

Ropovod IKL může za rok dopravit do ČR 13 miliónů tun ropy.

Dodatek: Státní společnost MERO, a.s. uvádí kapacitu ropovodu 10 mil. tun, což postačuje k pokrytí české spotřeby, která se pohybuje okolo 8 mil. tun ročně.

Př. 2: Urči, jakou hloubku musí mít 3 m široký zavlažovací kanál, aby jím při rychlosti $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ protékalo $8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ vody.

$$l = 3 \text{ m}, v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, Q_v = 8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}, h = ?$$

$$Q_v = Sv = lhv \Rightarrow h = \frac{Q_v}{lv} = \frac{8}{3 \cdot 1,5} \text{ m} = 1,8 \text{ m}$$

Zavlažovací kanál by měl mít hloubku 1,8 m.

Př. 3: Z naplno otevřeného kohoutku se hrnec o objemu 3 l napustí za 15 sekund. Urči rychlost, kterou teče během napouštění voda v rozvodu, pokud má trubka průměr 10 mm. Jakou rychlostí teče voda v páteřním rozvodu o průměru 26 mm.

$$V = 3 \text{ l} = 0,003 \text{ m}^3, t = 15 \text{ s}, d_1 = 10 \text{ mm} \Rightarrow r_1 = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m},$$

$$d_2 = 26 \text{ mm} \Rightarrow r_2 = 13 \text{ mm} = 0,013 \text{ m}, v_1 = ?, v_2 = ?$$

$$Q_v = \frac{V}{t} = Sv \Rightarrow v = \frac{V}{St} = \frac{V}{\pi r^2 t}$$

$$\text{Normální rozvod: } v_1 = \frac{V}{\pi r_1^2 t} = \frac{0,003}{\pi \cdot 0,005^2 \cdot 15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Páteční rozvod: $v_2 = \frac{V}{\pi r_2^2 t} = \frac{0,003}{\pi \cdot 0,013^2 \cdot 15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

V normálním rozvodu teče voda rychlostí $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ v páteřním rychlostí $0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

V předchozím příkladu jsme využili skutečnosti, že objemový průtok trubicí je stejný ve všech místech bez ohledu na průřez v daném místě. \Rightarrow

Rovnice kontinuity: $Q_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$. Při ustáleném proudění ideální kapaliny je objemový průtok v každém místě trubice stejný.

Př. 4: Vysvětli, proč se proud vody vytékající z kohoutku postupně zužuje.

Voda vytékající z kohoutku teče (padá) dolů \Rightarrow zvětšuje se rychlost jejího pohybu \Rightarrow podle vzorce $S_1 v_1 = S_2 v_2$ se musí zmenšit průřez proudu.

Zalévání (příklad z praxe)

Potřebujeme dostříknout do větší vzdálenosti \Rightarrow potřebujeme větší rychlost vody na konci hadice \Rightarrow prstem částečně ucpeme ústí hadice \Rightarrow zmenšíme průřez, kterým teče voda \Rightarrow zvětšíme rychlost vody.

Problém: Hadici držíme při zalévání většinou přibližně vodorovně, na zvýšení rychlosti vody je nutná energie, kde ji voda v hadici vezme?

Pedagogická poznámka: Následující odvození je možné přeskočit, žáci většinou tlak jako další typ energie sami odhalí a vzorec $E_t = pV$ jim přijde přirozený.

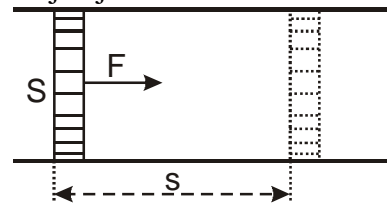
Pokusy z kapalinami:

- z děravého pytlíku voda vytéká pomalu, po zmáčknutí pytlíku začne z děr stříkat,
- voda rychleji vytéká z děr, které jsou ve větší hloubce pod hladinou (je tam větší hydrostatický tlak),

\Rightarrow zvýšení tlaku vede k větší kinetické energii vytékající vody \Rightarrow jedním z druhů mechanické energie je **tlaková potenciální energie kapaliny**.

Jaká je vzorec pro velikost tlakové energie?

Stejně jako u ostatních druhů energie si pomůžeme prací.



Práce, kterou vykonáme, když posuneme píst stříkačky proti tlaku kapaliny (o tuto práci se pak zvětší potenciální tlaková energie): $W = Fs$. Upravíme vztah tak, aby se v něm vyskytoval tlak kapaliny \Rightarrow použijeme $F = pS$:

$$W = Fs = pSs = pV = E_t \quad (\text{platí } Ss = V).$$

\Rightarrow Zvětšení kinetické energie kapaliny v zúženém místě je kompenzováno snížením tlakové potenciální energie.

Zákon zachování energie: $E_t + E_k = \text{konst.}$

$$pV + \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.} \quad (\text{dosadíme } m = \rho V)$$

$$pV + \frac{1}{2}\rho Vv^2 = \text{konst.} \quad (\text{vydělíme objemem } V \Rightarrow \text{získáme vztah pro jednotku objemu})$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.} - \text{Bernoulliho rovnice.}$$

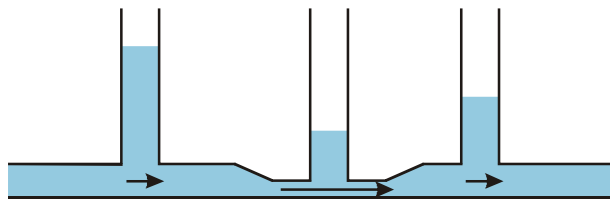
Bernoulliho rovnice: Součet kinetické a tlakové potenciální energie jednotkového objemu kapaliny se ve vodorovné trubici nemění \Rightarrow pro vodorovnou trubici se dvěma průřezy S_1 a S_2 platí: $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$.

Důsledek: V užší části trubice teče kapalina rychleji \Rightarrow má větší kinetickou energii, celková energie se nemění \Rightarrow musí menší tlakovou potenciální energii \Rightarrow v užším místě je menší tlak.

Nejde o rozpor se zkušeností?

Zalévání hadicí: vysoký tlak je v hadici (větší průřez), i náš prst tlačí voda směrem dopředu (tedy kolmo na kapalinu v hadici), nízký tlak je ve zúženém místě (voda netlačí prst do strany, aby zvětšil díрку, voda se příliš nerozstříkuje) \Rightarrow soulad s Bernoulliho rovnicí.

Pokus:



V místě, kde je trubice zúžená (a voda tam teče rychleji), vystoupá voda do menší výšky \Rightarrow je tam nižší tlak.

Hydrodynamické paradoxon: V zúženém místě trubice proudí kapalina rychleji a proto v něm působí na stěny menším tlakem.

Shrnutí: Při proudění nestlačitelné kapaliny trubicí se objemový průtok nemění.