1.8.9 Bernoulliho rovnice

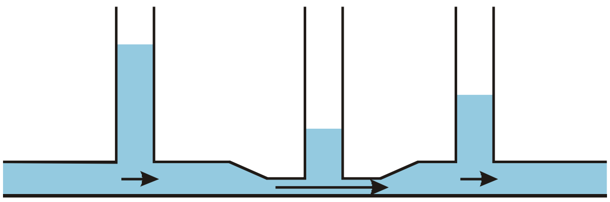
Předpoklady: 010808

Pomůcky: dva papíry, přicucávadlo, fixírka.

Konec minulé hodiny: Pokud kapalina proudí trubicí s různými průměry, mění se rychlost jejího proudění $\Rightarrow$ mění se její kinetická energie $\Rightarrow$ mění se její tlaková energie a platí Bernoulliho rovnice.

Bernoulliho rovnice: Součet kinetické a tlakové potenciální energie jednotkového objemu kapaliny se ve vodorovné trubici nemění $\Rightarrow$ pro vodorovnou trubici se dvěma průřezy S_1 a S_2 platí: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$.

Důsledek: V užší části trubice teče kapalina rychleji $\Rightarrow$ má větší kinetickou energii $\Rightarrow$ musí menší tlakovou potenciální energii $\Rightarrow$ v užším místě je menší tlak.
Pokus:



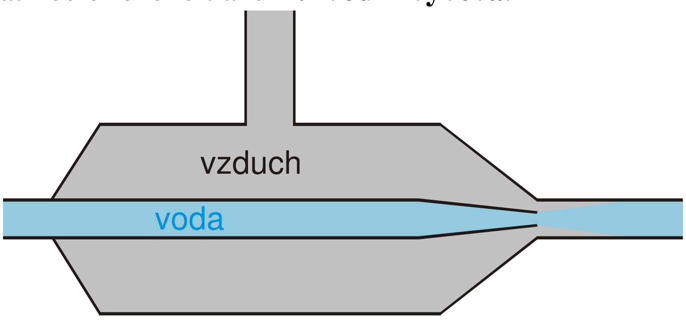
V místě, kde je trubice zúžená (a voda tam teče rychleji), vystoupá voda do menší výšky $\Rightarrow$ je tam nižší tlak.

Př. 1: Vysvětli, proč ve třetím sloupečku, který je nad místem se stejným průřezem jako první sloupeček, nevystoupá voda do stejné výšky.

Voda je reálná kapalina $\Rightarrow$ má vnitřní tření $\Rightarrow$ její energie se při pohybu musí zmenšovat $\Rightarrow$ celková energie u třetího sloupečku musí být menší než u prvního sloupečku $\Rightarrow$ rychlost je u obou sloupečků stejná $\Rightarrow$ kapalina má nižší tlakovou energii a vystoupá u třetího sloupečku níže.

Hydrodynamický paradox (hydrodynamické paradoxon): V zúženém místě trubice proudí kapalina rychleji a tím se snižuje její tlak.

$\Rightarrow$ Pokud rychlost kapaliny nabývá velkých hodnot, může tlak poklesnout až pod úroveň atmosférického tlaku $\Rightarrow$ **vodní vývěva**.



Ke snižování tlaku dochází i u plynů, Bernoulliho rovnice pro plyny je však složitější (kvůli stlačitelnosti plynů se s tlakem mění jejich hustota).

Pokus: Dva papíry držíme v rukou vodorovně kousek od sebe, zafoukáme mezi ně $\Rightarrow$ papíry se k sobě přiblíží $\Rightarrow$ proudící vzduch mezi papíry má nižší tlak než stojící vzduch okolo (**aerodynamické paradoxon**).

Pedagogická poznámka: Předchozí pokus je třeba udělat. Když se zeptáte žáků, co se stane, takřka bez výjimky odpoví (i po předchozím výkladu), že papíry půjdou od sebe.

Př. 2: Urči rychlost, kterou vytéká voda z otvoru, který je 20 cm pod hladinou. Jak hluboko by musel být otvor, aby byla rychlost výtoku dvakrát větší?

$h = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}$, $v = ?$, $h_2 = ?$

Voda o jednotkovém objemu má u otvoru tlakovou energii: $E_t = h\rho g$.

Vytékající voda o jednotkovém objemu má kinetickou energii: $E_k = \frac{1}{2}\rho v^2$.

Zákon zachování energie: $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$.

$$0 + h\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$2gh = v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Chceme, aby výtoková rychlost byla dvakrát větší: $2 = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$.

$$2 = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \quad /^2$$

$$4 = \frac{2gh_2}{2gh_1} \Rightarrow h_2 = 4h_1$$

Voda bude z otvoru vytékat rychlostí $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pokud má vytékat dvakrát větší rychlostí, musí být otvor ve čtyřikrát větší hloubce (80 cm).

Dodatek: Získaný vztah pro výtokovou rychlost $v = \sqrt{2gh}$ je zcela stejný jako vztah, který jsme získali pro rychlost volně padajícího tělesa (ze zcela jasných důvodů).

Př. 3: V páteřním vodovodním rozvodu o průměru 26 mm je udržován tlak $0{,}3\,\text{MPa}$. Jaký tlak bude v místním rozvodu za podmínek z příkladu 2 z minulé hodiny (rychlosti vody $2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $0{,}38\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, průměr slabšího potrubí 10 mm)? Jaký průměr by musela mít trubka, ve které by tlak klesnul pod 100000 Pa?

$d_2 = 26\,\text{mm} \Rightarrow r_2 = 13\,\text{mm} = 0{,}013\,\text{m}$, $v_1 = 2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 0{,}38\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $p_2 = 0{,}3\,\text{MPa}$, $p_1 = ?$, $p_3 = 100000\,\text{Pa}$, $d_3 = ?$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad / \cdot 2$$
$$\rho v_1^2 + 2p_1 = \rho v_2^2 + 2p_2$$
$$2p_1 = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2$$
$$p_1 = \frac{\rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2}{2} = \frac{1000 \cdot 0,38^2 - 1000 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 300000}{2}\,\mathrm{Pa} = 297000\,\mathrm{Pa}$$

Výpočet průměru trubice se známým tlakem

Nejdříve určíme rychlost vody:
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_3 \quad / \cdot 2$$
$$\rho v_2^2 + 2p_2 = \rho v_3^2 + 2p_3$$
$$\rho v_2^2 + 2p_2 - 2p_3 = \rho v_3^2$$
$$\frac{\rho v_2^2 + 2p_2 - 2p_3}{\rho} = v_3^2$$
$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2p_2 - 2p_3}{\rho}} = \sqrt{0,38^2 + \frac{2 \cdot 300000 - 2 \cdot 100000}{1000}}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Z rovnice kontinuity získáme průměr:
$$S_2 v_2 = S_3 v_3$$
$$\pi r_2^2 v_2 = \pi r_3^2 v_3$$
$$r_3^2 = \frac{r_2^2 v_2}{v_3} \Rightarrow r_3 = \sqrt{\frac{r_2^2 v_2}{v_3}} = \sqrt{\frac{0,013^2 \cdot 0,38}{20}}\,\mathrm{m} = 1,8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 1,8\,\mathrm{mm}$$
$$\Rightarrow d_3 = 3,6\,\mathrm{mm}$$

V místním rozvodu je tlak 297000 Pa. Trubka by musela mít průměr 3,6 mm, aby v ní tlak klesnul na 100000 Pa.

Pedagogická poznámka: Všechny hodnoty v předchozím příkladu by měly odpovídat reálnému životu. Upozorněte žáky na to, že pokles tlaku není za běžných situací nijak výrazný.

Př. 4: V páteřním vodovodním rozvodu o průměru 26 mm je udržován tlak $0,3\,\mathrm{MPa}$, voda teče rychlostí $0,38\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaký bude tlak v místě zúženém na průměr 3 mm?

$d_2 = 26\,\mathrm{mm} \Rightarrow r_2 = 13\,\mathrm{mm} = 0,013\,\mathrm{m}$, $v_2 = 0,38\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $p_2 = 0,3\,\mathrm{MPa}$,

$d_1 = 3\,\mathrm{mm} \Rightarrow r_1 = 1,5\,\mathrm{mm} = 0,0015\,\mathrm{m}$, $p_1 = ?$,

Nejdříve určíme rychlost:
$$S_2 v_2 = S_1 v_1$$
$$\pi r_2^2 v_2 = \pi r_1^2 v_1$$
$$v_1 = \frac{r_2^2 v_2}{r_1^2} = \frac{0,013^2 \cdot 0,38}{0,0015^2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 29\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad / \cdot 2$$
$$\rho v_1^2 + 2p_1 = \rho v_2^2 + 2p_2$$

$2p_1 = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2$

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2}{2} = \frac{1000 \cdot 0{,}38^2 - 1000 \cdot 29^2 + 2 \cdot 300000}{2} \text{Pa} = -240000\,\text{Pa}$$

Záporný tlak nedává smysl $\Rightarrow$ není možné, aby ve skutečnosti probíhal pokus popsaným způsobem, voda v širší trubici nemá dostatečnou energii k tomu, aby se protlačilo dostatečnou rychlostí zúženým místem $\Rightarrow$ dvě možnosti:

- v širší trubici vzroste tlak (na 0,54 MPa), aby voda měla dostatečnou energii a dokázala zrychlit na potřebnou rychlost,
- v širší trubici poklesne rychlost vody tak, aby k zúženému místu přitékalo jen tolik vody, kolik může protéci při maximální možné rychlosti toku.

Př. 5: Proč průvan zavírá dveře?

V mezeře mezi dveřmi a zárubní proudí vzduch rychleji než v místnostech $\Rightarrow$ ve štěrbině je menší tlak vzduchu $\Rightarrow$ okolní vzduch dveře zavírá.

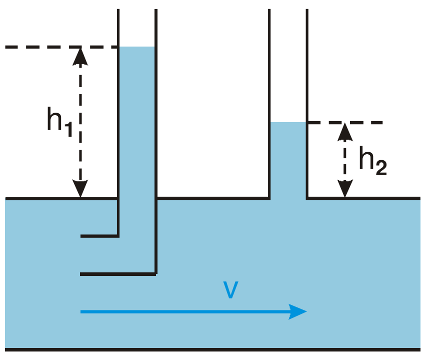
Př. 6: Vysvětli pokus zaznamenaný na adrese: http://vimeo.com/3157035.

Míček se nachází v rychlém proudu vzduchu, nejrychleji proudí vzduch v těsné blízkosti míčku $\Rightarrow$ pokud se míček vychýlí z nejrychlejšího proudění, je tlak na straně u rychlejšího proudění menší a přitáhne míček opět doprostřed.

Př. 7: Vysvětli funkci fixírky.

Foukáním vytváříme rychle se pohybující proud vzduchu s malým tlakem. Tlak stojícího vzduchu nad hladinou kapaliny je vyšší než tlak pohybujícího se vzduchu nad horním koncem fixírky $\Rightarrow$ kapalina stoupá v trubici nahoru a rozprašuje se v proudu vzduchu.

Př. 8: K měření rychlosti kapalin a zejména k měření rychlosti vůči okolnímu vzduchu se používá Pitotova trubice. Na obrázku je nakreslena její realizace, která umožňuje měřit rychlost proudící kapaliny. Vysvětli její princip. Odvoď vztah pro výpočet rychlosti v z výšek h_1 a h_2.



Kapalina v levém vývodu stojí a má pouze tlakovou energii (která odpovídá hydrostatickému tlaku v hloubce h_1), kapalina u pravého vývodu má kinetickou i tlakovou energii.

Platí (Bernoulliho rovnice): $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$ (dosadíme $v_1 = 0$)

$$0 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$\rho v_2^2 = 2(p_1 - p_2)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$ (dosadíme pro tlaky $p_1 = h_1\rho g$, $p_2 = h_2\rho g$)

$$v = \sqrt{\frac{2(h_1\rho g - h_2\rho g)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho g(h_1 - h_2)}{\rho}} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Př. 9: Pitotovy trubice se nejčastěji používají k měření rychlosti letadel. Urči rozdíl tlaků v obou vývodech u dopravního letadla letícího rychlostí 880 km/h (cestovní rychlost letadla Airbus 380). Letadlo leží ve výšce 11 km, hustota vzduchu v této výšce je $0{,}36\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Proč se Pitotovy trubice využívají i v dnešních letadlech, která jsou samozřejmě vybavena i GPS navigací, která umožňuje velmi přesně určovat i okamžitou rychlost?

$v = 880\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 244\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $\rho = 0{,}36\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $\Delta p = ?$

Použijeme mezivýsledek předchozího příkladu: $v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$.

$$\rho v^2 = 2\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{0{,}36\cdot 244^2}{2}\,\mathrm{Pa} = 11000\,\mathrm{Pa}$$

Rozdíl v tlaku ve vývodech Pitotovy trubice je 11000 Pa. Pro pilotáž letadla je zásadní jeho rychlost vzhledem k okolnímu vzduchu, GPS navigace určuje rychlost vzhledem povrchu Země $\Rightarrow$ měření rychlosti pomocí GPS nestačí.

Shrnutí: Tlak v tekutině je menší v místech, kde proudí rychleji.