

1.8.9 Bernoulliho rovnice

Předpoklady: 010808

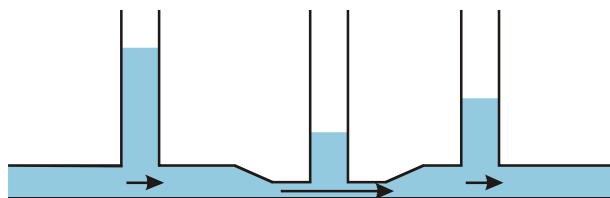
Pomůcky: dva papíry, přicucávací hadlo, fixírka.

Konec minulé hodiny: Pokud se tekutina proudí trubicí s různými průměry, mění se rychlost jejího proudění \Rightarrow mění se její kinetická energie \Rightarrow mění se její tlaková energie a platí Bernoulliho rovnice.

Bernoulliho rovnice: Součet kinetické a tlakové potenciální energie jednotkového objemu kapaliny se ve vodorovné trubici nemění \Rightarrow pro vodorovnou trubici se dvěma průřezy S_1 a S_2 platí: $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$.

Důsledek: V užší části trubice teče kapalina rychleji \Rightarrow má větší kinetickou energii \Rightarrow musí mít menší tlakovou potenciální energii \Rightarrow v užším místě je menší tlak.

Pokus:



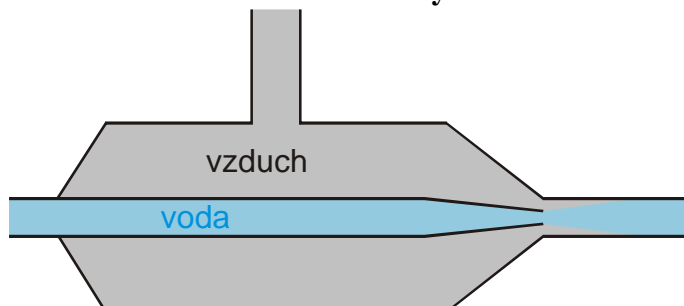
V místě, kde je trubice zúžená (a voda tam teče rychleji), vystoupá voda do menší výšky \Rightarrow je tam nižší tlak.

Př. 1: Vysvětli, proč ve třetím sloupečku, který je nad místem se stejným průřezem jako první sloupeček, nevystoupá voda do stejné výšky.

Voda je reálná kapalina \Rightarrow má vnitřní tření \Rightarrow její energie se při pohybu musí zmenšovat \Rightarrow celková energie u třetího sloupečku musí být menší než u prvního sloupečku \Rightarrow rychlost je u obou sloupečků stejná \Rightarrow kapalina má nižší tlakovou energii a vystoupá u třetího sloupečku níže.

Hydrodynamické paradoxon: V zúženém místě trubice proudí kapalina rychleji a tím se snižuje její tlak.

\Rightarrow Pokud rychlost kapaliny nabývá velkých hodnot, může tlak poklesnout až pod úroveň atmosférického tlaku \Rightarrow **vodní vývěva**.



Ke snižování tlaku dochází i u plynů, Bernoulliho rovnice pro plyny je však složitější (kvůli stlačitelnosti plynů se s tlakem se mění jejich hustota).

Pokus: Dva papíry držíme v rukou vodorovně kousek od sebe, zafoukáme mezi ně \Rightarrow papíry se k sobě přiblíží \Rightarrow proudící vzduch mezi papíry má nižší tlak než stojící vzduch okolo (**aerodynamické paradoxon**).

Pedagogická poznámka: Předchozí pokus je třeba udělat. Když se zeptáte žáků, co se stane, takřka bez výjimky odpoví (i po předchozím výkladu), že papíry půjdou od sebe.

Př. 2: Urči rychlost, kterou vytéká voda z otvoru, který je 20 cm pod hladinou. Jak hluboko by musel být otvor, aby byla rychlost výtoku dvakrát větší?

$$h = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}, v = ?, h_2 = ?$$

Voda o jednotkovém objemu má tlakovou energii: $E_p = h\rho g$.

Voda o jednotkovém objemu má kinetickou energii: $E_k = \frac{1}{2}\rho v^2$.

Zákon zachování energie: $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$.

$$0 + h\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$2gh = v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Chceme, aby výtoková rychlost byla dvakrát větší: $2 = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$.

$$2 = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \quad /^2$$

$$4 = \frac{2gh_2}{2gh_1} \Rightarrow h_2 = 4h_1$$

Voda bude z otvoru vytékat rychlostí $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pokud má vytékat dvakrát větší rychlostí, musí být otvor ve čtyřikrát větší hloubce (80 cm).

Dodatek: Získaný vztah pro výtokovou rychlost $v = \sqrt{2gh}$ je zcela stejný jako vztah, který jsme získali pro rychlost volně padajícího tělesa (ze zcela jasných důvodů).

Př. 3: V páteřním vodovodním rozvodu o průměru 26 mm je udržován tlak 0,3 MPa. Jaký tlak bude v místním rozvodu za podmínek z příkladu 2 z minulé hodiny (rychlosti vody $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, průměr slabšího potrubí 10 mm). Jaký průměr by musela mít trubka, ve které by tlak klesnul pod 100000 Pa.

$$d_2 = 26 \text{ mm} \Rightarrow r_2 = 13 \text{ mm} = 0,013 \text{ m}, v_1 = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_2 = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, p_2 = 0,3 \text{ MPa}, p_1 = ?, p_3 = 100000 \text{ Pa}, d_3 = ?$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad / \cdot 2$$

$$\rho v_1^2 + 2p_1 = \rho v_2^2 + 2p_2$$

$$2p_1 = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2$$

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2}{2} = \frac{1000 \cdot 0,38^2 - 1000 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 300000}{2} \text{ Pa} = 297000 \text{ Pa}$$

Výpočet průměru trubice se známým tlakem

Nejdříve určíme rychlost vody:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 + p_3 \quad / \cdot 2$$

$$\rho v_2^2 + 2p_2 = \rho v_3^2 + 2p_3$$

$$\rho v_2^2 + 2p_2 - 2p_3 = \rho v_3^2$$

$$\frac{\rho v_2^2 + 2p_2 - 2p_3}{\rho} = v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2p_2 - 2p_3}{\rho}} = \sqrt{0,38^2 + \frac{2 \cdot 300000 - 2 \cdot 100000}{1000}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Z rovnice kontinuity získáme průměr:

$$S_2 v_2 = S_3 v_3$$

$$\pi r_2^2 v_2 = \pi r_3^2 v_3$$

$$r_3^2 = \frac{r_2^2 v_2}{v_3} \Rightarrow r_3 = \sqrt{\frac{r_2^2 v_2}{v_3}} = \sqrt{\frac{0,013^2 \cdot 0,38}{20}} \text{ m} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,8 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d_3 = 3,6 \text{ mm}$$

V místním rozvodu je tlak 297000 Pa. Trubka by musela mít průměr 3,6 mm, aby v ní tlak klesnul na 100000 Pa.

Pedagogická poznámka: Všechny hodnoty v předchozím příkladu by měly odpovídat reálnému životu. Upozorněte žáky na to, že pokles tlaku není za běžných situací nijak výrazný.

Př. 4: V páteřním vodovodním rozvodu o průměru 26 mm je udržován tlak 0,3 MPa, voda teče rychlostí $0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaký bude tlak v místě zúženém na průměr 3 mm?

$$d_2 = 26 \text{ mm} \Rightarrow r_2 = 13 \text{ mm} = 0,013 \text{ m}, \quad v_2 = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad p_2 = 0,3 \text{ MPa},$$

$$d_1 = 3 \text{ mm} \Rightarrow r_1 = 1,5 \text{ mm} = 0,0015 \text{ m}, \quad p_1 = ?,$$

Nejdříve určíme rychlost:

$$S_2 v_2 = S_1 v_1$$

$$\pi r_2^2 v_2 = \pi r_1^2 v_1$$

$$v_1 = \frac{r_2^2 v_2}{r_1^2} = \frac{0,013^2 \cdot 0,38}{0,0015^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad / \cdot 2$$

$$\rho v_1^2 + 2p_1 = \rho v_2^2 + 2p_2$$

$$2p_1 = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2$$

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2 - \rho v_1^2 + 2p_2}{2} = \frac{1000 \cdot 0,38^2 - 1000 \cdot 29^2 + 2 \cdot 300000}{2} \text{ Pa} = -240000 \text{ Pa}$$

Záporný tlak nedává smysl \Rightarrow není možné, aby ve skutečnosti probíhal pokus popsaným způsobem, voda v širší trubici nemá dostatečnou energii k tomu, aby se protlačilo dostatečnou rychlostí zúženým místem \Rightarrow dvě možnosti:

- v širší trubici vzroste tlak (na 0,54 MPa), aby voda měla dostatečnou energii a dokázala zrychlit na potřebnou rychlost,
- v širší trubici poklesne rychlost vody tak, aby ke zúženému místu přitékalo jen tolik vody, kolik může protéci při maximální možné rychlosti toku.

Př. 5: Proč průvan zavírá dveře?

V mezeře mezi dveřmi a zárubní proudí vzduch rychleji než v místnostech \Rightarrow ve štěbině je menší tlak vzduchu \Rightarrow okolní vzduch dveře zavírá.

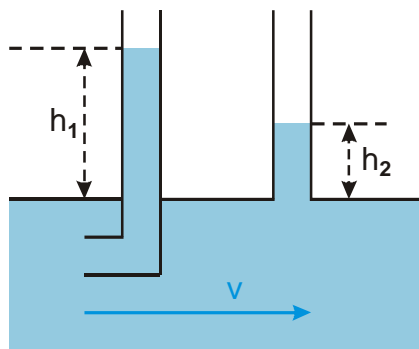
Př. 6: Vysvětli pokus zaznamenaný na adrese: <http://vimeo.com/3157035>.

Míček se nachází v rychlém proudu vzduchu, nejrychleji proudí vzduch v těsné blízkosti míčku \Rightarrow pokud se míček vychýlí z nejrychlejšího proudění, je tlak na straně u rychlejšího proudění menší a přitáhne míček opět doprostřed.

Př. 7: Vysvětli funkci fixírky.

Foukáním vytváříme rychle se pohybující proud vzduchu s malým tlakem. Tlak stojícího vzduchu nad hladinou kapaliny je vyšší než tlak pohybujícího se vzduchu nad horním koncem fixírky \Rightarrow kapalina stoupá v trubici nahoru a rozprašuje se v proudu vzduchu.

Př. 8: K měření rychlosti kapalin a zejména k měření rychlosti vůči okolnímu vzduchu se používá Pitotova trubice. Na obrázku je nakreslena její realizace, která umožňuje měřit rychlost proudící kapaliny. Vysvětli její princip. Odvoď vztah pro výpočet rychlosti v z výšek h_1 a h_2 .



Kapalina v levém vývodu stojí a má pouze tlakovou energii (která odpovídá hydrostatickému tlaku v hloubce h_1), kapalina u pravého vývodu má kinetickou i tlakovou energii.

Platí (Bernoulliho rovnice): $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$ (dosadíme $v_1 = 0$)

$$0 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

$$\rho v_2^2 = 2(p_1 - p_2)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (\text{dosadíme pro tlaky } p_1 = h_1 \rho g, p_2 = h_2 \rho g)$$

$$v = \sqrt{\frac{2(h_1 \rho g - h_2 \rho g)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho g (h_1 - h_2)}{\rho}} = \sqrt{2g (h_1 - h_2)}$$

Př. 9: Pitotovy trubice se nejčastěji používají k měření rychlosti letadel. Urči rozdíl tlaků v obou vývodech u dopravního letadla letícího rychlostí 880 km/h (cestovní rychlost letadla Airbus 380). Letadlo leží ve výšce 11 km, hustota vzduchu v této výšce je $0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Proč se Pitotovy trubice využívají i v dnešních letadlech, která jsou samozřejmě vybavena i GPS navigací, která umožňuje velmi přesně určovat i okamžitou rychlost?

$$v = 880 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 244 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \rho = 0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \Delta p = ?$$

Použijeme mezivýsledek předchozího příkladu: $v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$.

$$\rho v^2 = 2\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{0,36 \cdot 244^2}{2} \text{ Pa} = 11000 \text{ Pa}$$

Rozdíl v tlaku ve vývodech Pitotovy trubice je 11000 Pa. Pro pilotáž letadla je zásadní jeho rychlost vzhledem k okolnímu vzduchu, GPS navigace určuje rychlost vzhledem povrchu Země \Rightarrow měření rychlosti pomocí GPS nestačí.

Shrnutí: Tlak v tekutině je menší v místech, kde proudí rychleji.