

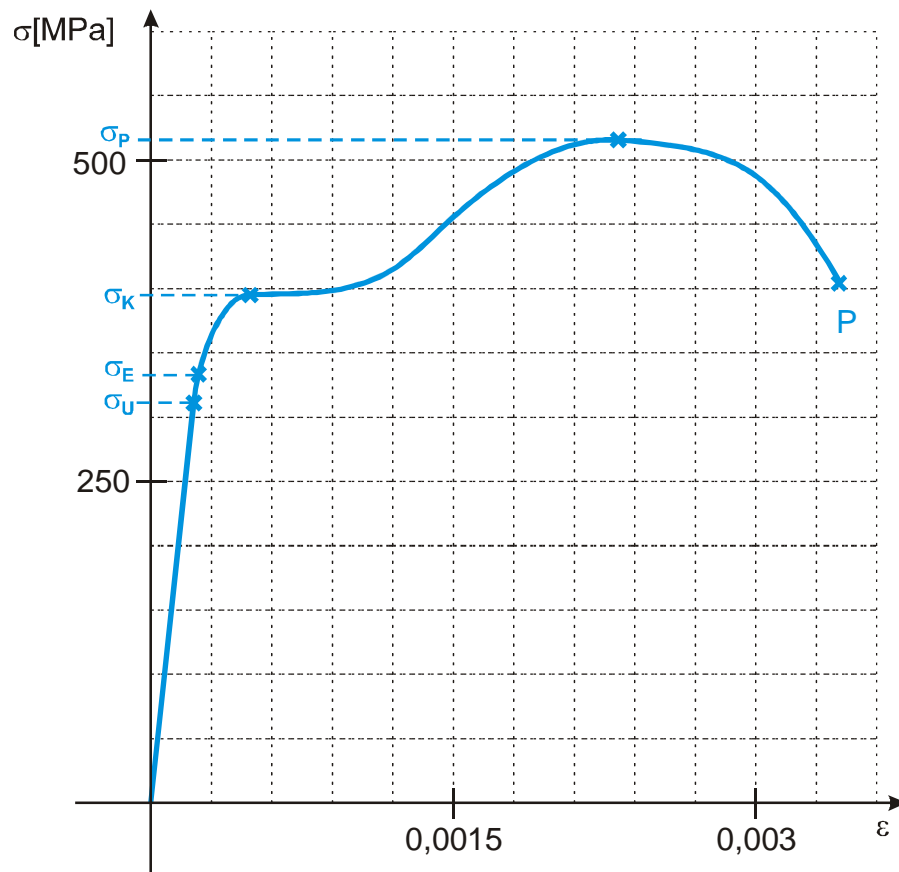
2.4.5 Deformace, normálové napětí II

Předpoklady: 020404

Sledujeme, jak závisí ε (relativní prodloužení) na σ (normálovém napětí) \Rightarrow **deformační křivka**.

Poznámka: Graf ukazuje závislost ε na σ pro ocel. Deformační křivky jiných materiálů mohou být značně odlišné, přesto je chování ocele bráno jako typické. Přestože příčinou prodlužování je normálové napětí, vynáší se na osu x jako nezávislá proměnná relativní prodloužení ε .

Př. 1: Na obrázku je zachycena závislost normálového napětí na relativním prodloužení pro ocel. Jaký význam a jakou zkratku mají významné body vyznačené na křivce: mez kluzu, mez pevnosti, mez pružnosti a mez úměrnosti?



Sledujeme graf od bodu $[0;0]$:

Se zvyšujícím se napětím roste prodloužení přímo úměrně až do hodnoty napětí σ_U .

- σ_U - **mez úměrnosti**: po překročení meze úměrnosti přestává být relativní prodloužení přímo úměrné normálovému napětí.
- σ_E - **mez pružnosti**: po překročení meze pružnosti přestává být deformace pružná a materiál už se nevrátí do původního stavu.

- σ_k - **mez kluzu**: po překročení meze kluzu se zvětšuje relativní prodloužení, aniž by se zvětšovalo normálové napětí (materiál se prodlužuje bez zvětšování síly – tečení materiálu), mění se fyzikální vlastnosti materiálu.
- σ_p - **mez pevnosti**: po překročení meze pevnosti se materiál přetrhne.

Př. 2: Urči z grafu:

- mez pevnosti ocele
- mez kluzu ocele
- O kolik procent se prodlouží ocel, než se přetrhne.
- O kolik se může prodloužit 50 m dlouhé ocelové lano tak, aby jeho deformace zůstala pružná.

a) Mez pevnosti ocele je přibližně 515 MPa .

b) Mez kluzu ocele je přibližně 395 MPa.

c) Z grafu je vidět, že v okamžiku přetržení platí $\varepsilon = 0,0034 \Rightarrow$ ocel se prodlouží o 0,34%.

d) Z grafu je vidět, že pro normálové napětí rovné mezi pružnosti platí $\varepsilon = 0,00024$.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta l = \varepsilon l_0 = 0,00024 \cdot 50 \text{ m} = 0,012 \text{ m}$$

Mez pevnosti v tahu je u mnoha materiálů stejná jako mez pevnosti v tlaku.

Hodnoty pro některé látky:

látka	ocel	ocel pro lana	dřevo dub (po vláknecích)	cihly (pevnost v tlaku)	beton (pevnost v tlaku)
σ_p [MPa]	350 - 800	až 2000	92	10 - 50	5 - 20

Př. 3: Urči minimální průměr ocelového lana pro výtah, když kabina má nosnost 300 kg a hmotnost 500 kg. Hmotnost lana zanedbej.

$$\sigma_p = 2000 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa} , m = 300 + 500 \text{ kg} = 800 \text{ kg} , d = ?$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{\pi r^2} \quad (\text{plocha kruhu } S = \pi r^2)$$

$$r^2 = \frac{m \cdot g}{\pi \sigma} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \sigma}}$$

$$r = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \sigma}} = \sqrt{\frac{800 \cdot 10}{\pi \cdot 2 \cdot 10^9}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,1 \text{ mm} \Rightarrow d = 2r = 2,2 \text{ mm}$$

Lano výtahu musí mít průměr 2,2 mm.

Zdá se to málo. Proč?

Lano u výtahů je ve skutečnosti tlustší, protože:

- výtah musí zrychlovat a lano tedy musí vydržet větší zatížení (tento vliv ale není vzhledem k poměrně malým zrychlením výtahů příliš citelný),
- není zvykem využívat pevnost materiálu až do meze pevnosti (v našem případě by určitě neměla být překročena mez pružnosti, aby se při zatížení lano nevratně neprotáhlo),
- v technických aplikacích (použitích v zařízeních) je požadována rezerva.

Působící síla se při technických výpočtech násobí bezpečnostním koeficientem k (podle druhu materiálu a použití konstrukce se pohybuje od 1 do 15) nebo se místo meze pevnosti zavádí dovolené napětí, které je k krát menší.

Více o bezpečnostních koeficientech: http://www.mitcalc.com/doc/help/cz/c_safety.htm.

Př. 4: Vysvětli, proč se ocelová lana splétají z vláken a nejsou z jednoho kusu.

Lano spletené z vláken:

- se snadněji ohýbá,
- má větší reálnou pevnost. Přetržení jednoho vlákna neznamená přetržení celého lana. Kdyby bylo lano z jednoho kusu, jeho natržení by bylo daleko nebezpečnější.

Horolezecká lana mají ještě složitější konstrukci (jádro, které zajišťuje nosnost lana, a oplet, který chrání jádro před poškozením a povětrnostními vlivy).

Př. 5: Urči mez pevnosti pavoučího vlákna, pokud má průměr přibližně $1\mu\text{m}$ a je možné ho přetrhnout silou 8 mN .

$$F = 8\text{ mN} = 8 \cdot 10^{-3}\text{ N}, \quad d = 1\mu\text{m} \Rightarrow r = 0,5\mu\text{m} = 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ m}, \quad \sigma = ?$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi r^2} \quad \text{plocha kruhu } S = \pi r^2$$

$$\sigma = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-6})^2} = 10^{10}\text{ Pa} = 10000\text{ MPa}$$

Mez pevnosti pavoučího vlákna je 10000 MPa (tedy pětkrát vyšší než mez pevnosti speciální lanové oceli).

Př. 6: Urči délku ocelového drátu, který by se při zavěšení přetrhl vlastní vahou.

$$\sigma = 2000\text{ MPa} = 2 \cdot 10^9\text{ Pa} \quad \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad l = ?$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} = \frac{S \cdot l \cdot \rho \cdot g}{S} = l \cdot \rho \cdot g$$

$$l = \frac{\sigma}{\rho \cdot g}$$

$$l = \frac{\sigma}{\rho \cdot g} = \frac{2 \cdot 10^9}{7800 \cdot 10} \text{ m} = 25600\text{ m}$$

Ocelový drát o délce 25600 m by se při zavěšení přetrhl vlastní vahou.

Př. 7: Odvoď vztah pro určení maximální výšky stavby postavené z cihel (betonu). Urči pro obě hmoty výšku takové stavby v průměrném případě. Potřebné konstanty najdi v tabulkách.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} = \frac{S \cdot h \cdot \rho \cdot g}{S} = h \cdot \rho \cdot g$$

$$h = \frac{\sigma}{\rho \cdot g} \quad (\text{stejný vzorec jako pro délku lana})$$

a) cihly $\sigma = 30 \text{ MPa}$, $\rho = 1700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$$h = \frac{\sigma}{\rho \cdot g} = \frac{30 \cdot 10^6}{1700 \cdot 10} \text{ m} = 1765 \text{ m}$$

b) beton $\sigma = 12,5 \text{ MPa}$, $\rho = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$$h = \frac{\sigma}{\rho \cdot g} = \frac{12,5 \cdot 10^6}{2000 \cdot 10} \text{ m} = 625 \text{ m}$$

Dodatek: Pevnost cihlové zdi je podstatně nižší než samotných cihel (závisí zejména vlastnostech použité malty). Pohybuje se do 2 MPa. Tím by možná výška zdi klesla na 120 m.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je zábavou pro nejchytřejší. Stihnout ho s většinou třídy není moc reálné.

Př. 8: Urči minimální průměr ocelového lana pro výtah, když kabina má nosnost 300 kg a hmotnost 500 kg. Hmotnost lana uvažuj, výtah je umístěn v nejvyšší budově světa a lano má délku 800 m.

$$\sigma_p = 2000 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \quad m_v = 300 + 500 \text{ kg} = 800 \text{ kg}, \quad l = 800 \text{ m}, \quad d = ?$$

Kromě hmotnosti výtahu působí na ocelové lano i jeho vlastní hmotnost: $m = m_v + m_l$.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{(m_v + m_l) \cdot g}{S}$$

$$\sigma S = m_v g + g m_l = m_v g + g V_l \rho \quad (\text{objem lana } V_l = Sl)$$

$$\sigma S = m_v g + g Sl \rho$$

$$\sigma S - g Sl \rho = m_v g$$

$$S = \pi r^2 = \frac{m_v g}{\sigma - gl \rho} \quad (\text{plocha kruhu } S = \pi r^2)$$

$$r^2 = \frac{m_v g}{\pi(\sigma - gl \rho)} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{m_v g}{\pi(\sigma - gl \rho)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{m_v g}{\pi(\sigma - gl \rho)}} = \sqrt{\frac{800 \cdot 10}{\pi(2 \cdot 10^9 - 10 \cdot 800 \cdot 7800)}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,1 \text{ mm}$$

Lano výtahu musí mít průměr 2,2 mm.

Po zaokrouhlení jsme dostali stejný výsledek jako u původního příkladu, kde jsme hmotnost lana zanedbávali. Přesnější hodnoty:

- neuvažujeme hmotnost lana $d = 2,256 \cdot 10^{-3} \text{ m}$,
- uvažujeme hmotnost lana $d = 2,293 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Rozdíl v obou výsledcích je opravdu malý \Rightarrow vlastní hmotnost lana nehraje podstatnou roli ani při navrhování nejdelších výtahů.

Shrnutí: Mez pevnosti je hodnota tlaku, při které se materiál přetrhne.

