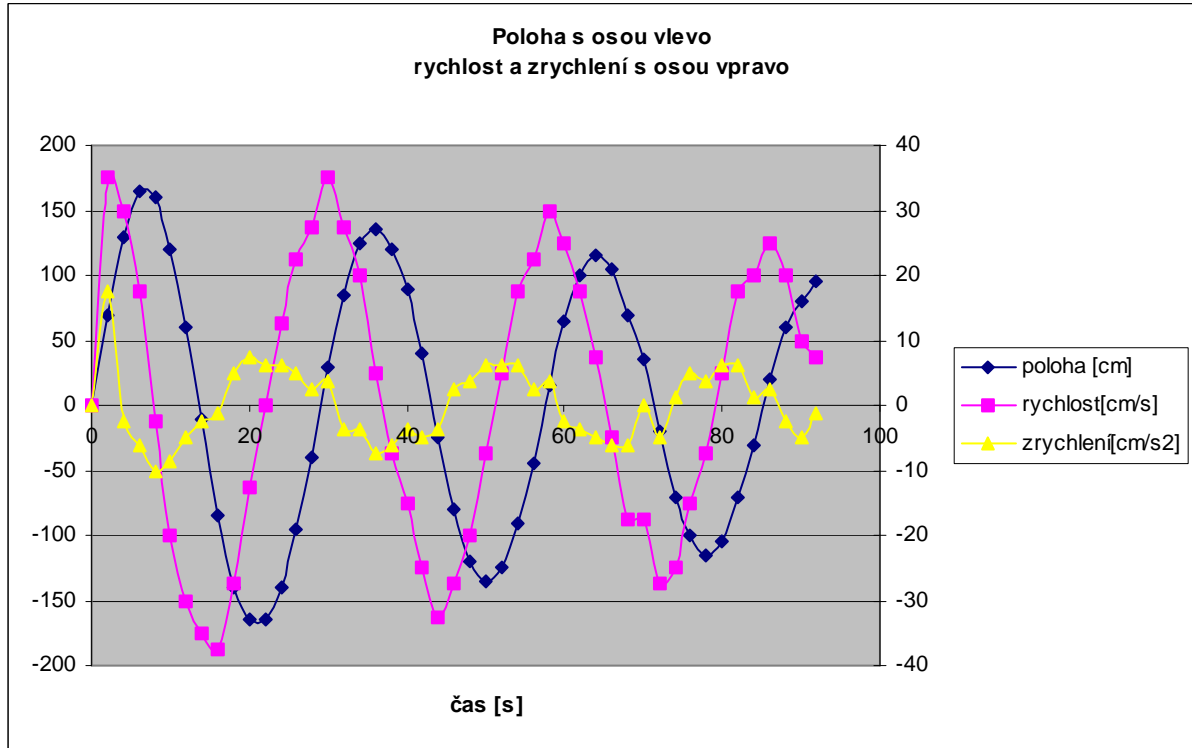


### 3.1.3 Rychlost a zrychlení harmonického pohybu

**Předpoklady: 3102**

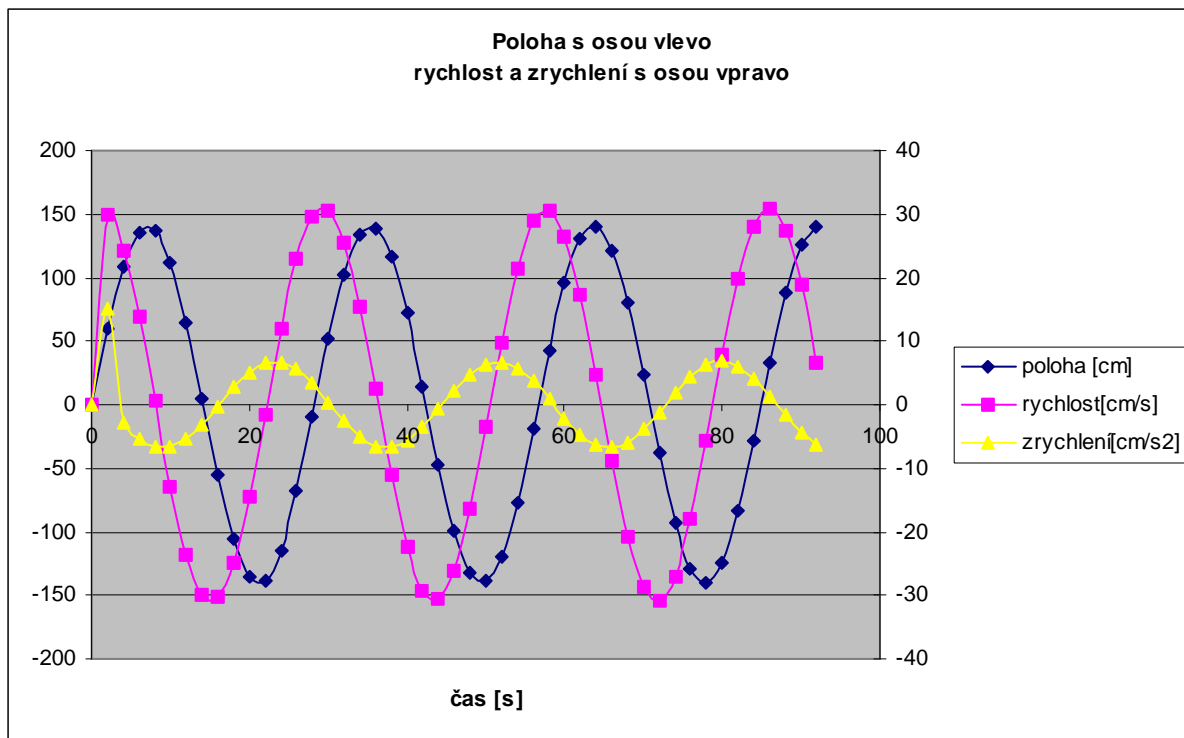
Kromě dráhy (výchyly) popisujeme pohyb i pomocí dalších dvou veličin: rychlosti a zrychlení. Jak budou vypadat jejich rovnice?

**Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (naměřené hodnoty)**



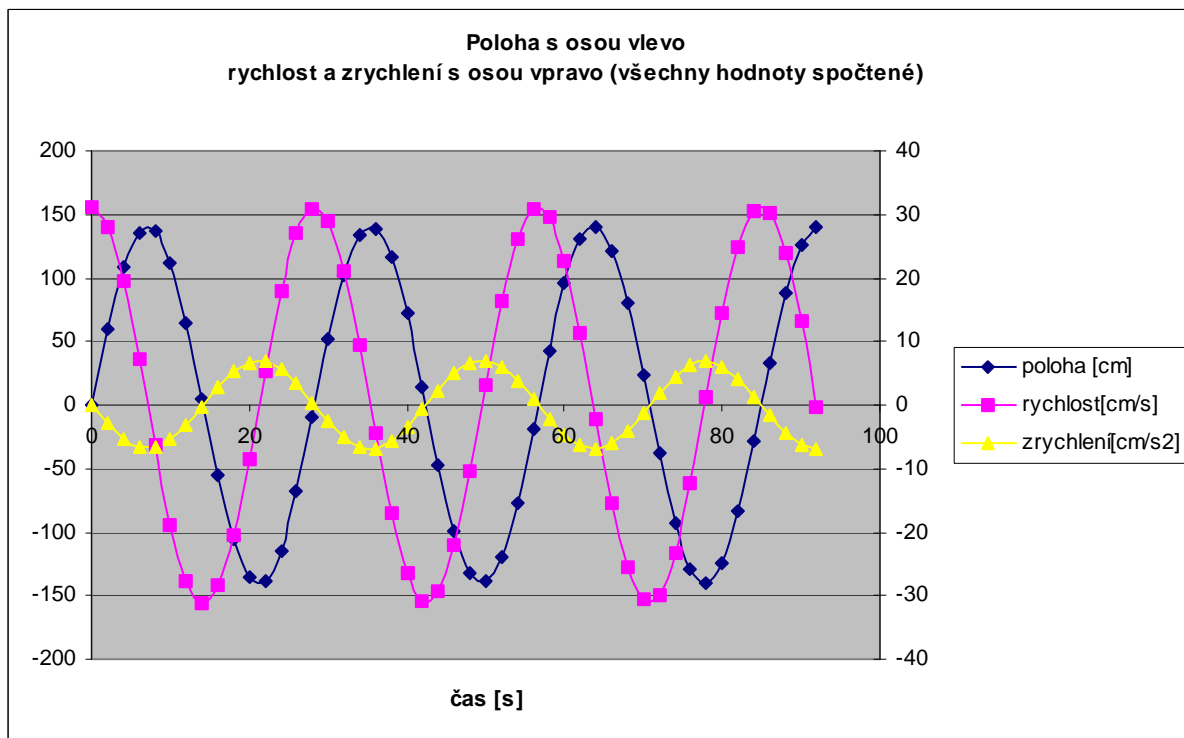
Zdá se, že i ostatní pohybové veličiny mají tvar sinusoid, se stejnou frekvencí, ale s jinou výškou a jiným posunutím. Postřeh ověříme na grafu z vypočtených hodnot.

**Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (vypočtené hodnoty)**



Pokud počítáme rychlost a zrychlení z ideálních (vypočtených) hodnot, grafy rychlost i zrychlení se vyhladí a získají tvar dokonalých sinusovek. Kvůli velkému časovému úseku při výpočtu jsou v grafu dvě chyby – špatný tvar křivek na počátku a malé posunutí po časové ose.

### Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (vypočtené hodnoty opravené)



Rovnice pro výchylku:  $y = y_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

Hledáme **vztah pro okamžitou rychlost**  $v =$  :

- jiná výška  $\Rightarrow$  místo  $y_m$  použijeme  $v_m$ ,
- stejná úhlová frekvence,
- graf začíná v maximální výchylce jako funkce  $y = \cos x$ ,

$$\Rightarrow v = v_m \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Hodnota  $v_m$  musí být určena parametry pohybu  $y_m$  a  $\omega$ .

Větší výchylka, větší frekvence ( $\Rightarrow$  kratší perioda)  $\Rightarrow$  kyvadlo se musí pohybovat rychleji, aby za periodu stačilo udělat kmit  $\Rightarrow v_m = y_m \omega$ .

**Rovnice okamžité rychlosti harmonického pohybu:**  $v = y_m \omega \cos(\omega \cdot t)$ .

**Př. 1:** Urči maximální rychlost koštěte a porovnej vypočtenou hodnotu s hodnotou v grafu. Pro výpočet využij hodnoty získané v minulé hodině ( $y_m = 140 \text{ cm}$ ,  $T = 28,3 \text{ s}$ ).

$$y_m = 140 \text{ cm}, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{1}{28,3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_m = y_m \omega = 140 \cdot 0,22 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 31 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vypočtená hodnota odpovídá nejen hodnotám maximální rychlosti vypočtené z ideálních hodnot výchylek, ale i hodnotám vypočteným z původních naměřených hodnot.

Hledáme **vztah pro okamžité zrychlení**  $a =$  :

- jiná výška  $\Rightarrow$  místo  $y_m$  použijeme  $a_m$ ,
- stejná úhlová frekvence,
- graf jde opačným směrem než graf výchylky  $\Rightarrow$  jako funkce  $y = -\sin x$ .

$$\Rightarrow a = a_m \cdot [-\sin(\omega \cdot t)] = -a_m \sin(\omega \cdot t)$$

Hodnota  $a_m$  musí být určena parametry pohybu  $v_m$  a  $\omega \Rightarrow a_m = v_m \omega = y_m \omega^2$ .

Logické: větší maximální rychlost a frekvence ( $\Rightarrow$  kratší perioda)  $\Rightarrow$  kyvadlo musí rychleji měnit rychlost, aby za periodu stačilo udělat kmit.

**Rovnice okamžitého zrychlení harmonického pohybu:**  $a = -y_m \omega^2 \sin(\omega \cdot t)$ .

**Př. 2:** Urči maximální zrychlení koštěte a porovnej vypočtenou hodnotu s hodnotou v grafu. Pro výpočet využij hodnoty získané v minulé hodině ( $y_m = 140 \text{ cm}$ ,  $T = 28,3 \text{ s}$ ).

$$y_m = 140 \text{ cm}, \quad \omega = 0,22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_m = y_m \omega^2 = 140 \cdot 0,22^2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} = 6,9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

Vypočtená hodnota odpovídá nejen hodnotám maximálního zrychlení vypočteného z ideálních hodnot výchylek, ale i hodnotám vypočteným z původních naměřených hodnot.

**Př. 3:** Vypočti hodnotu okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení koštěte v 50 s. Spočtené výsledky porovnej s naměřenými hodnotami.

$$\text{koště: } y_m = 140 \text{ cm}, \quad \omega = 0,22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{rychlost: } v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot 0,22 \cdot \cos(0,22 \cdot 50) = 0,14 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Naměřená hodnota  $v_{50} = -7,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , vypočtená hodnota odpovídá naměřené hodnotě, koště se nachází téměř v maximální poloze, rychlost by měla být přibližně nulová.

**zrychlení:**  $a_{50} = -y_m \omega^2 \sin(\omega \cdot t) = -140 \cdot 0,22^2 \cdot \sin(0,22 \cdot 50) = 6,9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$

Naměřená hodnota  $a_{50} = 6,25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ , vypočtená hodnota odpovídá naměřené hodnotě, koště se nachází téměř v maximální poloze, zrychlení by mělo být přibližně maximální.

**Pedagogická poznámka:** Při průchodu se třídou 4.2013 jsme získali kvůli rozdílům v zaokrouhlování několik podstatně se lišících výsledků pro rychlost:

$$v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot 0,22 \cdot \cos(0,22 \cdot 50) = 0,14 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot 0,222 \cdot \cos(0,222 \cdot 50) = 3,24 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot \frac{2\pi}{28,3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{28,3} \cdot 50\right) = 3,27 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot 0,22 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{28,3} \cdot 50\right) = 3,24 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m \omega \cos(\omega \cdot t) = 140 \cdot \frac{2\pi}{28,3} \cdot \cos(0,22 \cdot 50) = 3,24 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Můžete s žáky rozvinout diskusi o tom, proč se stejná míra zaokrouhlení projeví u počáteční rychlosti daleko méně než u úhlové frekvence (počítáme rychlost po téměř dvou periodách a proto se chyba "počítala" dvakrát).

**Př. 4:** Struna na kytarě kmitá pokud hrajeme tón  $a^1$  s frekvencí 440 Hz. Urči maximální rychlost a maximální zrychlení jejího pohybu, pokud kmitá s maximální výchylkou 2 mm.

$$f = 440 \text{ Hz}, y_m = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 440 = 880\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2765 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_m = y_m \omega = 0,002 \cdot 2765 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_m = y_m \omega^2 = 0,002 \cdot 2765^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 15000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Hlavně maximální zrychlení dosahuje překvapivé hodnoty, která odpovídá velké frekvenci pohybu (je způsobena velkou silou působící na malou hmotnost struny).

**Př. 5:** Popiš slovně, jak se mění okamžitá výchylka, okamžitá rychlost i okamžité zrychlení závaží při jeho kmitavém pohybu na pružině. Ve kterých polohách je rychlost závaží maximální? Ve kterých polohách je zrychlení závaží maximální. Zdůvodni i pomocí Newtonových pohybových zákonů.

Pohyb můžeme rozdělit do čtyř fází.

Závaží jde z rovnovážné polohy nahoru:

- zvětšují se kladné výchylky závaží,
- rychlost se zmenšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje dolů),
- zrychlení je záporné se zvětšující se hodnotou (pružina se zkracuje a tím se zvětšuje výsledná síla působící na závaží směrem dolů),
- v maximální kladné výchylce se závaží na okamžik zastaví, jeho rychlost se mění s největším záporným zrychlením (pružina je maximálně zkrácena a na závaží působí maximální výsledná síla směrem dolů).

Závaží jde z maximální kladné výchylky dolů do rovnovážné polohy:

- zmenšují se kladné výchylky závaží,
- rychlost má záporné znaménko, její velikost se zvětšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje dolů),
- zrychlení je záporné se zmenšující se hodnotou (pružina se prodlužuje a tím se zmenšuje výsledná síla působící na závaží směrem dolů),
- v rovnovážné poloze je výchylka nulová, rychlost je záporná s největší hodnotou a zrychlení je nulové.

Závaží jde z rovnovážné polohy dolů:

- zvětšují se záporné výchylky závaží,
- rychlost má záporné znaménko, její velikost se zmenšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje nahoru),
- zrychlení je kladné se zvětšující se hodnotou (pružina se prodlužuje a tím se zvětšuje výsledná síla působící na závaží směrem nahoru),
- v maximální záporné výchylce se závaží na okamžik zastaví, jeho rychlost se mění s největším kladným zrychlením (pružina je maximálně prodloužena a na závaží působí maximální výsledná síla směrem nahoru).

Závaží jde z maximální záporné výchylky nahoru do rovnovážné polohy:

- zmenšují se záporné výchylky závaží,
- rychlost má kladné znaménko, její velikost se zvětšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje nahoru),
- zrychlení je záporné se zmenšující se hodnotou (pružina se zkracuje a tím se zmenšuje výsledná síla působící na závaží směrem nahoru),
- v rovnovážné poloze je výchylka nulová, rychlost je kladná s největší hodnotou a zrychlení je nulové.

Maximální rychlost má závaží vždy při průchodu rovnovážnou polohou.

Maximální zrychlení má závaží vždy v krajních polohách.

**Shrnutí:** Při harmonickém kmitavém pohybu jsou i okamžité hodnoty rychlosti a zrychlení popsány pomocí funkce sinus.