3.1.6 Dynamika kmitavého pohybu, závaží na pružině

Předpoklady: 3103

Pedagogická poznámka: Na příští hodinu by si všichni měli do dvojice přinést metrový provázek (nebo silnější nit) a stopky.

Pomůcky: pružina, stojan, závaží 200 g, stopky.

Dynamika: Zjišťování příčiny pohybu $\Rightarrow$ mechanika 1. ročník:

- síla F (příčina změny pohybu),
- hmotnost *m* (odpor proti změně pohybu),
- zrychlení *a* (změna pohybu),

$\Rightarrow$ 2. Newtonův zákon $a = \frac{F}{m}$.

2. Newtonův zákon platí pro všechna tělesa, tedy i pro kyvadlo, závaží na pružině nebo kmitající strunu, protože to jsou také mechanické pohyby.
Problém: Neustále se mění ***F*** a ***a*** $\Rightarrow$ potřebujeme vztah, který by svazoval parametry oscilátoru (tuhost pružiny, hmotnost závaží, délka kyvadla) s některou z veličin, které se během kmitání nemění (perioda, frekvence, úhlová frekvence).

$$y = y_m \sin(\omega \cdot t)$$

$$a = -\omega^2 y_m \sin(\omega t) \Rightarrow a = -\omega^2 y$$

Dosadíme z 2. Newtonova zákona $a = \frac{F}{m}$.

$$\frac{F}{m} = -\omega^2 y$$

$\Rightarrow F = -m\omega^2 y$ - **pohybová rovnice harmonického kmitavého pohybu**
Pokud se nám podaří vyjádřit sílu pomocí výchylky (u pružiny i kyvadla síla na výchylce evidentně závisí), spočteme úhlovou frekvenci a z ní i periodu $\Rightarrow$ z parametrů oscilátoru určíme, jak bude kmitat.

Ověříme náš vztah na kmitech závaží na pružině.
Perioda kmitů závisí:

- na síle (tvrdosti) pružiny (silná pružina se protáhne míň než slabá): tvrdší pružina $\Rightarrow$ kratší perioda,
- na hmotnosti závaží: větší hmotnost $\Rightarrow$ delší perioda (závaží se při působení stejné síly pružiny pohybuje s menším zrychlením, déle mu trvá než projde celou periodou).

Jak popsat tvrdost pružiny?
Síla, kterou musíme natahovat pružinu, je přímo úměrná aktuálnímu prodloužení $\Rightarrow$ $F = k \cdot \Delta l$.

Konstanta ***k*** se nazývá **tuhost pružiny** [$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$]: $k = \frac{F}{\Delta l}$ $\Rightarrow$ velká tuhost, když velká síla způsobí jen malé prodloužení.

Př. 1: Jakou silou musíme působit na pružinu o tuhosti $150\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, aby se prodloužila o 2 cm?

$k = 150\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $\Delta l = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}$, $F = ?$
Dosadíme: $F = k\cdot\Delta l = 150\cdot 0{,}02\,\mathrm{N} = 3\,\mathrm{N}$.
Na pružinu musíme působit silou 3 N.

Př. 2: Urči tuhost pružin, které odpružují automobil, pokud po naložení nákladu o hmotnosti 350 kg, klesla karosérie o 3 cm. Předpokládej rovnoměrné zatížení všech čtyř kol.

$\Delta l = 3\,\mathrm{cm} = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $m = 350\,\mathrm{kg}$, $k = ?$
Auto má čtyři kola, síla na jednu pružinu je tedy čtvrtinou F_g nákladu.

$$F = k\cdot\Delta l \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\frac{F_g}{4}}{\Delta l} = \frac{F_g}{4\cdot\Delta l} = \frac{350\cdot 10}{4\cdot 0{,}03}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 29\,000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

Pružina automobilu mají tuhost $29\,000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

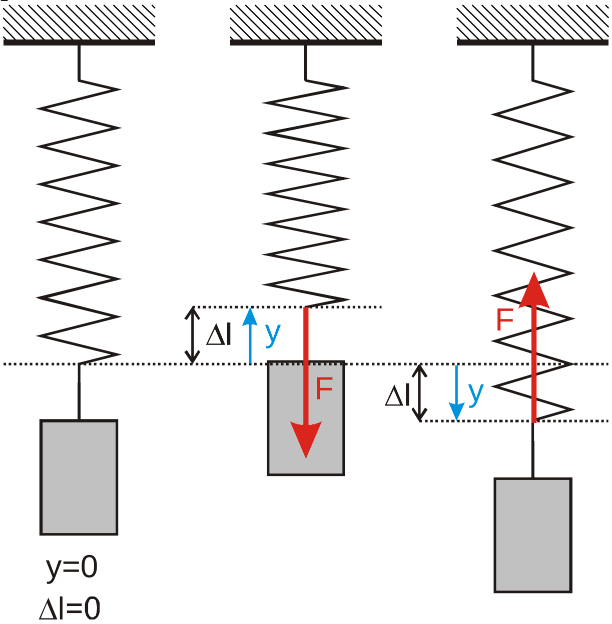
Př. 3: Urči experimentálně tuhost pružiny.

Na pružinu zavěsíme závaží (jeho tíha bude na pružinu působit) a změříme její prodloužení.
$m = 200\,\mathrm{g} \Rightarrow F = 1\,\mathrm{N}$, $\Delta l = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, $k = ?$

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{2}{0{,}075}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 27\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

Pružina má tuhost $27\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Zjišťujeme periodu pohybu závaží ze vztahu $F = -\omega^2 y m$.
Síla závisí na prodloužení Δl ($F = k\cdot\Delta l$) $\Rightarrow$ musíme najít i vztah mezi výchylkou y a prodloužením Δl.



Z obrázků je zřejmé, že platí:

- $|\Delta l| = |y|$ prodloužení z rovnovážné polohy má stejnou velikost jako výchylka,
- směr síly je opačný ke směru výchylky,

$\Rightarrow$ místo $F = k \cdot \Delta l$ můžeme psát $F = -ky$.

Dosadíme do $F = -\omega^2 y m$ výraz $F = -ky$.

$$-ky = -\omega^2 y m$$

$$k = \omega^2 m$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Výsledek odpovídá předpokladům:

- větší hmotnost $\Rightarrow$ delší perioda,
- větší tuhost $\Rightarrow$ kratší perioda.

Pedagogická poznámka: Odvození vzorce nekopíruje odvození použité v učebnicích pro gymnázia. Je úmyslně přímočařejší a vychází pouze z výchylek z rovnovážné polohy.

Př. 4: Urči pomocí odvozeného vzorce periodu pohybu závaží o hmotnosti 200g na pružině, jejíž tuhost jsme měřili v předchozí části hodiny. Potom periodu změř a porovnej oba výsledky.

$k = 27\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, $T = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{27}}\,\mathrm{s} = 0{,}54\,\mathrm{s}$$

Výsledky měření:

20 kmitů … 11,4 s

1 kmit … $\frac{11{,}4}{20}\,\mathrm{s} = 0{,}57\,\mathrm{s}$

Výsledky nejsou zcela stejné, ale shoda odpovídá přesnosti měření.

Př. 5: Urči hmotnost závaží, které musíme zavěsit na pružinu o tuhosti $27\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, aby kmitalo s periodou 0,6 s. Výsledek ověř experimentem.

$k = 27\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $T = 0{,}6\,\mathrm{s}$, $m = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad /^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$m = \frac{T^2 k}{4\pi^2} = \frac{0{,}6^2 \cdot 27}{4\pi^2}\,\mathrm{kg} = 0{,}25\,\mathrm{kg} = 250\,\mathrm{g}$$

Na pružinu musíme zavěsit závaží o hmotnosti 250 g.

Př. 6: Ze vztahu pro periodu kmitavého pohybu závaží na pružině odvoď vztah pro frekvenci tohoto pohybu.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ dosadíme $T = \frac{1}{f}$

$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Př. 7: Závaží o hmotnosti 100 g kmitá na pružině o tuhosti $15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ s maximální výchylkou 2cm.
a) Urči největší rychlost, kterou se závaží v průběhu pohybu pohybuje. Ve kterém okamžiku dosahuje této rychlosti?
b) Urči největší sílu, která na závaží působí. Ve kterém okamžiku k tomu dochází?

$k = 15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $m = 100\,\mathrm{g} = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, $y_m = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}$, $v_m = ?$, $F_m = ?$

Vzorec pro maximální rychlost: $v_m = \omega y_m$.

2 NZ: $F = ma$, vzorec pro maximální zrychlení: $a_m = \omega^2 y_m \Rightarrow F_m = a_m m = \omega^2 y_m m$.

$\Rightarrow$ potřebujeme vztah pro úhlovou frekvenci.

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Dosadíme: $v_m = \omega y_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot y_m = \sqrt{\frac{15}{0{,}1}} \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 0{,}24\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Největší rychlost má závaží vždy, když prochází rovnovážnou polohou.

$F_m = \omega^2 y_m m = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 y_m \cdot m = \frac{k}{m} y_m m = k y_m = 15 \cdot 0{,}02\,\mathrm{N} = 0{,}3\,\mathrm{N}$

Největší síla působí na závaží vždy v místech maximální výchylky.

Dodatek: Největší působící sílu je samozřejmě možné spočítat rovnou z rovnice $F = k \cdot \Delta l = k \cdot y_m$.

Př. 8: BONUS: Malá zavařovací sklenice částečně naplněná vodou plave na vodní hladině. Sklenici trochu zatlačíme do vody a pustíme, čímž ji uvedeme do kmitavého pohybu. Urči výpočtem jeho periodu. Výsledek ověř pokusem.

Vyjdeme z pohybové rovnice: $F = -\omega^2 y m$.

Potřebujeme vyjádřit síly, která se zatlačenou plechovku snaží navrátit do rovnovážné polohy. Touto silou je vztlaková síla odpovídající objemu, který se ponořil díky zatlačení plechovky do vody: $F = F_{vz} = V\rho g = S \cdot h\rho g = S \cdot h\rho g = -Sy\rho g$ (hloubka, do které se plechovka z rovnovážné polohy ponořila, je rovna velikosti výchylky plechovky z rovnovážného stavu, vztlaková síla má opačný směr než výchylka.

$$-Sy\rho g = -\omega^2 y m \qquad / : y$$

$$S\rho g = \omega^2 m \qquad / : m$$

$$\frac{S\rho g}{m} = \omega^2 \qquad / \sqrt{}$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}} \qquad / : 2\pi$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S\rho g}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}}$$

Vzorec se zdá rozumný. v čitateli je hmotnost plechovky (podobně jako u závaží na pružině), členy ve jmenovateli odpovídají velikost vztlakové síly, která se snaží vrátit plechovku do rovnovážné polohy (podobně jako tuhost pružiny).

Shoda s experimentem závisí na konkrétní plechovce a také na nádobě, ve které pokus provádíme. Při výpočtu jsme zanedbali třecí síly i vznik vln v nádobě.

Shrnutí: Pokud se nám do vztahu $F = -\omega^2 y m$ podaří dosadit vztah mezi okamžitou velikostí síly a okamžitou výchylkou, získáme vztah pro úhlovou frekvenci kmitání v závislosti na parametrech oscilátoru.