3.1.7 Kyvadlo

Předpoklady: 3106

Pedagogická poznámka: Celý obsah hodiny není možné stihnout za 45 minut. Je třeba se rozhodnout, co je podstatné: testování vzorce praktickým sestrojováním kyvadel, povídání o kyvadlových hodinách nebo počítání složitějších příkladů. Dva poslední příklady je pak možné zadat spíše na doma.

Př. 1: Najdi veličiny, na kterých závisí perioda kyvadla (závaží zavěšené na provázku).

Perioda zřejmě závisí na:

- délce kyvadla (větší délka $\Rightarrow$ delší perioda),
- hmotnosti kyvadla (větší hmotnost $\Rightarrow$ delší perioda jako u pružiny).

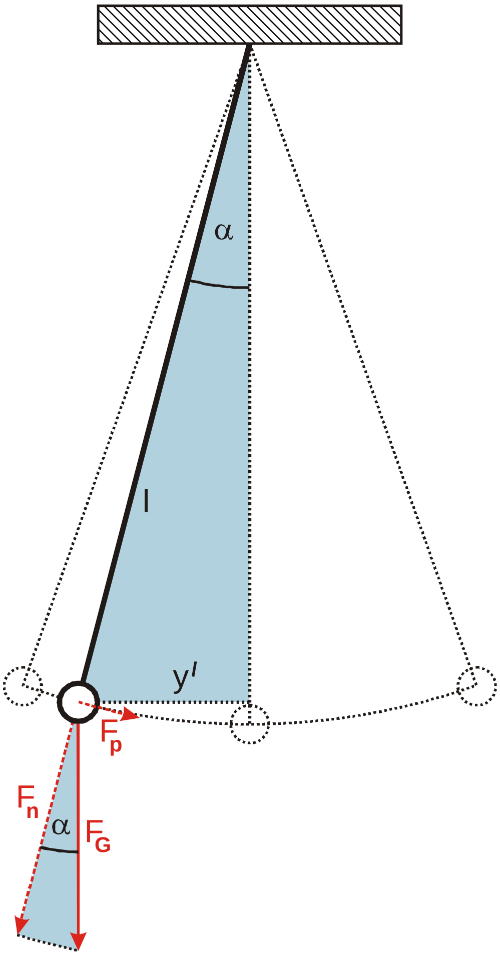
Pedagogická poznámka: Perioda kyvadla na hmotnosti samozřejmě nezáleží, uvažovat o této závislosti je však zcela přirozené a fyzikálně opodstatněné.

Známe pohybovou rovnici harmonického kmitání $F = -m\omega^2 y$ $\Rightarrow$ zkusíme vztah pro periodu kyvadla odvodit.
Záleží na přesnosti pohledu:

- pokud zanedbáme velikost závaží a hmotnost provázku $\Rightarrow$ **matematické kyvadlo** (hmotný bod na nehmotném závěsu),
- pokud uvažujeme velikost závaží, případně i hmotnost provázku $\Rightarrow$ **fyzické kyvadlo** (tuhé těleso otáčivé kolem osy, deformace provázku musíme zanedbat).

Dále se budeme zabývat pouze matematickými kyvadly (jednodušší).

Odvození platí pouze pro malé úhly α (do $5°$).



Kyvadlo uvádí do pohybu pohybová složka F_p tíhové síly F_g.

Z vyznačených podobných pravoúhlých trojúhelníků: $\frac{F_p}{F_g} = \frac{y'}{l} \Rightarrow F_p = \frac{y'}{l} F_g$.

Pro malé úhly je vyznačená vodorovná výchylka y' přibližně rovna výchylce y.

$F_p = \frac{y}{l} F_g = y \frac{mg}{l}$ (platí pouze pro velikosti).

Síla F_p má pro malé úhly přibližně opačný směr než výchylka $y \Rightarrow F_p = -y \frac{mg}{l}$.

Dosadíme do rovnice: $F_p = F = -m\omega^2 y$.

$$-y \frac{mg}{l} = -m\omega^2 y$$

$$\frac{g}{l} = \omega^2$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Překvapivě nezáleží na hmotnosti kyvadla (ale je to pochopitelné, větší hmotnost sice znamená větší odpor ke zrychlování, ale také větší zrychlovací sílu). Analogie tíhového zrychlení, se kterým ve vzduchoprázdnu padají všechny předměty.

Př. 2: Urči periodu kyvadla na stole a srovnej ji s naměřenou hodnotou.

Délka kyvadla: $l = 32\,\text{cm} = 0{,}32\,\text{m}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $T = ?$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}32}{10}} = 1{,}12\,\text{s}$$

Naměřená hodnota: 20 kmitů …..22,5 s $\Rightarrow T = 1{,}125\,\text{s}$

Pedagogická poznámka: Předpokládám, že učitel do hodiny nějaké kyvadlo přinese. Změření kyvadla by měl v případě, že studenti budou kyvadla sestavovat sami, provést sám a neměl by příliš komentovat, jak přesně měření provedl.

Př. 3: Urči délku kyvadla, které kmitá s periodou 1 s. Kyvadlo sestroj a jeho periodu změř. Porovnej oba výsledky.

$T = 1\,\text{s}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $l = ?$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$$

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2} g$$

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2} g = \frac{1^2}{4\pi^2} 10\,\mathrm{m} = 0,253\,\mathrm{m}$$

Kyvadlo musí mít délku závěsu 0,253 m, aby kmitalo s periodou 1 s.

Pedagogická poznámka: 25 cm je dostatečně krátká délka, takže studenti mohou sestrojit kyvadlo pouhým zavěšení závaží na provázek a svá kyvadla zavěšovat za háčky na lavicích. Při porovnávání výsledků se zjistí, že nepřesnost studentů je většinou daleko větší než u kyvadla z příkladu 1. Diskuse by měla dojít k tomu, že chyby měření jsou obou případech stejné, ale relativní chyba je v druhém případě větší. Dalším problémem je, že studenti většinou měří pouze délku provázku, ne délku celého kyvadla k až k těžišti závaží. Jde o hezký příklad systematické chyby. Jinou možností je provést pokus frontálně před celou třídou a nechat provázek zavázet některého ze žáků. S trochou manipulace se Vám určitě podaří dotlačit žáka k tomu, aby do 25,3 cm započítal pouze provázek. Kyvadlo pak kývá ze zřetelně větší periodou (při použití 100 g závaží s háčkem dělá rozdíl do těžiště cca 2,5 cm, což vede k chybě v periodě o cca 0,6 s na deset kmitů). Následně se žáky rozebíráme možné zdroje chyby (odpor vzduchu, hmotnost provázku, velikost závaží, …). u jednotlivých podezření se ihned snažíme odhadnout jejich možný vliv (rychlost utlumení kmitů, hmotnost provázku, …).

Př. 4: Pro konstrukci hodin bylo v minulosti důležité tzv. sekundové kyvadlo, jehož doba kyvu (doba mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou, tedy polovina periody) je rovna 1 s. Urči jeho délku. Pro výpočet použij přesnější hodnotu tíhového zrychlení $g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

$\mathrm{Kyv}\,1\,\mathrm{s} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\,\mathrm{s}$, $g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $l = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$$

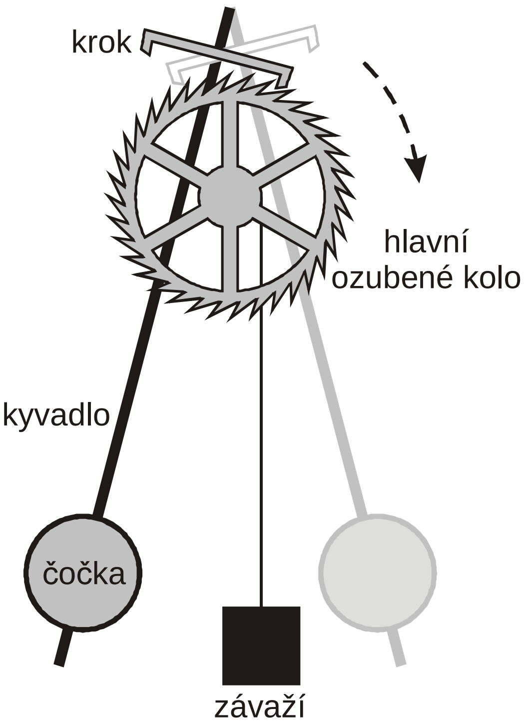
$$l = \frac{T^2}{4\pi^2} g$$

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2} g = \frac{2^2}{4\pi^2} 9,81\,\mathrm{m} = 0,994\,\mathrm{m}$$

Sekundové kyvadlo musí mít délku 0,994 m.

Poznámka: Délka sekundového kyvadla byla před zavedením metrické soustavy navrhována jako základní délková jednotka.

Př. 5: Pomocí obrázku se pokus vysvětlit, jakým způsobem řídí kyvadlo chod kyvadlových hodin.



Gravitace táhne závaží dolů $\Rightarrow$ závěs se snaží otáčet hlavním ozubeným kolem.
Krok se kývá spolu s kyvadlem a pouští při každém kyvu ozubené kolo o jeden zub.
Při dotyku ozubené kolo do kroku pokaždé šťouchne a tím udržuje kyvadlo v neustálém pohybu (jinak by se kývání po určité době zastavilo).

Pedagogická poznámka: Většina studentů nepřijde na to, že je důležité kyvadlu neustále dodávat energii, aby se nezastavilo. Přitom jde o zajímavý problém, protože když jsme zkusili původní kyvadlo nahradit závažím na provázku (o spočtené délce), kývání závaží se poměrně rychle uklidnily.

Př. 6: Závaží umístěné na kyvadle (čočka) je možné po kyvadle posunovat. Kam je nutné závaží po kyvadle posunout, pokud se hodiny zpožďují?

Hodiny se zpožďují $\Rightarrow$ zkracujeme periodu kyvadla $\Rightarrow$ podle vzorce $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ musíme zkrátit jeho délku $\Rightarrow$ musíme čočku posunout nahoru.

Př. 7: Kyvadlové hodiny jsou nařízeny tak, že jdou přesně při pokojové teplotě $20°C$. Jak se změní jejich chod, pokud teplota v místnosti klesne na $0°C$? Jakým způsobem je možné chybu napravit?

V místnosti se sníží teplota $\Rightarrow$ všechny předměty zmenší svoje rozměry $\Rightarrow$ zkrátí se délka kyvadla $\Rightarrow$ zkrátí se perioda kyvu $\Rightarrow$ hodiny se začnou předbíhat.
Musíme čočku posunout dolů, aby se perioda vrátila na původní hodnotu.

Př. 8: Konstrukce kyvadlových hodin je jedním z mála případů, kdy se i v běžném použití projeví rozdílná velikost tíhového zrychlení na různých místech Země. Budou na rovníku ($g = 9,78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) kyvadlového hodiny s kyvadlem nastaveným v Praze ($g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) předcházet nebo zpožďovat? Kam bude třeba posunout čočku, aby se hodiny přestaly rozcházet?

Vzorec pro periodu kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\Rightarrow$ pokud zůstane délka kyvadla stejná a tíhové zrychlení se přemístěním z Prahy na rovník zmenší, zmenší se číslo ve jmenovateli a tím se výsledná perioda prodlouží $\Rightarrow$ hodiny budou kývat pomaleji $\Rightarrow$ odměří více kyvů a budou se zpomalovat.
Čočku bude třeba posunout nahoru, aby zkrátila délka kyvadla i perioda jeho kmitů.

Dodatek: Tíhové zrychlení je v podstatě zbytek gravitačního zrychlení, který se nespotřebuje na udržování předmětu na kruhové dráze, na které se pohybuje při otáčení s povrchem Země. Předmět na pólu se neotáčí, předmět na rovníku se naopak otáčí s největší obvodovou rychlostí. Proto tíhové zrychlení na pólu největší ($g = 9,83\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, nic se nespotřebovává na dostřeďování) a jeho hodnota směrem k rovníku postupně klesá (na $g = 9,78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, s tím, jak je se čím dál více spotřebovává na dostřeďování). Více v hodinách 010404, 010405 a 010603.

Př. 9: V kterých místech České republiky musí mít kyvadlové hodiny kratší kyvadlo, aby kývaly se správnou periodou?

Hodnota tíhového zrychlení klesá od pólu k rovníku $\Rightarrow$ pokud má zůstat zachována velikost podílu $\frac{l}{g}$ ve vzorci $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ musí se s tíhovým zrychlením zmenšovat i délka kyvadla $\Rightarrow$ v jižních oblastech České republiky mají kyvadlové hodiny kratší kyvadlo.

Ve všech následujících příkladech o kyvadlových hodinách budeme předpokládat, že jsou vybaveny sekundovým kyvadlem s periodou $T = 2\,\mathrm{s}$.

Př. 10: Mají kyvadlové hodiny stejnou délku kyvadla ve stejné zeměpisné šířce v nížinách i v horách?

Když stoupáme do výšky, zvětšuje se naše vzdálenost od středu Země $\Rightarrow$ zmenšuje se gravitační přitahování $\Rightarrow$ zmenšuje se tíhové zrychlení $\Rightarrow$ prodlužuje se perioda kyvadla $\Rightarrow$ kyvadlové hodiny v horách mají kratší kyvadlo než kyvadlové hodiny v nížinách.

Př. 11: Urči, jak se budou rozcházet na rovníku ($g = 9,78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) kyvadlové hodiny s kyvadlem nastaveným v Praze ($g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

$g_r = 9,78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g_P = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $T = T_p = 2\,\mathrm{s}$, $\Delta T = ?$
Délka sekundového kyvadla v Praze (doba kmitu T_P):

$$T_P = 2\pi\sqrt{\frac{l_P}{g_P}} \;\Rightarrow\; T_P^2 = 4\pi^2 \frac{l_P}{g_P} \;\Rightarrow\; l_P = \frac{T_P^2 g_P}{4\pi^2}$$

Doba jednoho kmitu na rovníku: $T_r = 2\pi\sqrt{\frac{l_P}{g_r}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_P^2 g_P}{4\pi^2}}{g_r}} = \frac{2\pi T_P}{2\pi}\sqrt{\frac{g_P}{g_r}} = T_P\sqrt{\frac{g_P}{g_r}}$.

Změna doby kmitu: $\Delta T = T_r - T_P = T_P\sqrt{\frac{g_P}{g_r}} - T_P = T_P\left(\sqrt{\frac{g_P}{g_r}} - 1\right) = 2\left(\sqrt{\frac{9,81}{9,78}} - 1\right) = 3,07\cdot 10^{-3}\ \text{s}$.

Odchylka za 1 sekundu (perioda kyvadla jsou 2 sekundy): $1,53\cdot 10^{-3}\ \text{s}$.

Odchylka za celý den: $\Delta t = 3600\cdot 24\cdot 1,53\cdot 10^{-3}\ \text{s} = 132\ \text{s}$.

Hodiny nastavené v Praze se na rovníku opozdí o více než dvě minuty za den.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu a v příkladu 10 je lepší nechat slabší žáky počítat konkrétně. Postupné výsledky: $l_P = \frac{2^2\cdot 9,81}{4\pi^2} = 0,99396$,

$T_r = T_P\sqrt{\frac{g_P}{g_r}} = 2\cdot\sqrt{\frac{9,81}{9,78}}\ \text{s} = 2,003\ \text{s}$.

Př. 12: Urči, o kolik se za týden rozejdou kyvadlového hodiny, pokud se teplota v místnosti změní z $20°\text{C}$ na $5°\text{C}$. Předpokládej, že kyvadlo je vyrobeno ze železa se součinitelem teplotní roztažnosti $\alpha = 0,012\cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$. Předpokládej, že při teplotě $20°\text{C}$ šly hodiny přesně.

$t_1 = 20°\text{C}$, $t_2 = 5°\text{C}$, $\alpha = 0,012\cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$, $T = 2\ \text{s}$, $\Delta t = ?$

Změna teploty $\Delta t = t_2 - t_1 = -15°\text{C}$, změněná délka $l_2 = l_1(1+\alpha\Delta t)$

Původní doba kmitu: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$.

Doba kmitu po ochlazení místnosti: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1(1+\alpha\Delta t)}{g}}$.

Změna doby kmitu: $\Delta T = T_2 - T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1(1+\alpha\Delta t)}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(\sqrt{1+\alpha\Delta t} - 1\right)$

$$\Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(\sqrt{1+\alpha\Delta t} - 1\right) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_1^2 g}{4\pi^2}}{g}}\left(\sqrt{1+\alpha\Delta t} - 1\right) = T_1\left(\sqrt{1+\alpha\Delta t} - 1\right)$$

$$\Delta T = T_1\left(\sqrt{1+\alpha\Delta t} - 1\right) = 2\left(\sqrt{1+0,012\cdot 10^{-3}(-15)} - 1\right)\text{s} = -1,8\cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

Odchylka za týden: $\Delta t = \frac{3600\cdot 24\cdot 7}{2}\cdot\Delta T = \frac{3600\cdot 24\cdot 7}{2}\cdot 1,8\cdot 10^{-4}\ \text{s} = 54\ \text{s}$.

Hodiny se za týden předběhnou o necelou minutu.

Pedagogická poznámka:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1\left(1+\alpha\Delta t\right)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,99396\left(1+0,012\cdot 10^{-3}\cdot(-15)\right)}{9,81}}\,\mathrm{s} = 1,99982\,\mathrm{s}$$

Př. 13: Odvoď vztah pro korekci délky kyvadlo v závislosti na nadmořské výšce. Předpokládej, že jsi na pólu.

Během kmitání se mění rychlost i výška kyvadla $\Rightarrow$ dochází k přeměnám mechanické energie (kinetické a potenciální).

Př. 14: Rozděl kmitavý pohyb kyvadla na čtyři části a posuď se během nich mění kinetická a potenciální energie kyvadla.

Kyvadlo se pohybuje z rovnovážné polohy do maximální kladné výchylky:

- velikost rychlosti kyvadla se zmenšuje $\Rightarrow$ kinetická energie kyvadla se zmenšuje,
- velikost výchylky kyvadla se zvětšuje $\Rightarrow$ zvětšuje se i výška kyvadla $\Rightarrow$ zvětšuje se potenciální energie kyvadla.

Kyvadlo se pohybuje z maximální kladné výchylky do rovnovážné polohy:

- velikost rychlosti kyvadla se zvětšuje $\Rightarrow$ kinetická energie kyvadla se zvětšuje,
- velikost výchylky kyvadla se zmenšuje $\Rightarrow$ zmenšuje se i výška kyvadla $\Rightarrow$ zmenšuje se potenciální energie kyvadla.

Kyvadlo se pohybuje z rovnovážné polohy do maximální záporné výchylky:

- velikost rychlosti kyvadla se zmenšuje $\Rightarrow$ kinetická energie kyvadla se zmenšuje,
- velikost výchylky kyvadla se zvětšuje $\Rightarrow$ zvětšuje se i výška kyvadla $\Rightarrow$ zvětšuje se potenciální energie kyvadla.

Kyvadlo se pohybuje z maximální záporné výchylky do rovnovážné polohy:

- velikost rychlosti kyvadla se zvětšuje $\Rightarrow$ kinetická energie kyvadla se zvětšuje,
- velikost výchylky kyvadla se zmenšuje $\Rightarrow$ zmenšuje se i výška kyvadla $\Rightarrow$ zmenšuje se potenciální energie kyvadla.

Velmi podobná situace jako u kamene vrženého vzhůru: zmenšování jednoho typu energie provází zvětšování druhého druhu $\Rightarrow$ zdá se, že platí zákon zachování mechanické energie. Zřejmě to tak musí být, pokud zanedbáme odpor vzduchu a tření, kyvadlo se kývá se stejnou výchylkou $\Rightarrow$ potenciální energie kyvadla se musí přeměnit na jiný druh energie, aby kyvadlo při další maximální poloze dosáhlo stejné maximální výchylky.

Př. 15: Matematické kyvadlo o délce 1 m a hmotnosti $0,5\,\mathrm{kg}$ kývá s maximální výchylkou 5 cm. Porovnej jeho kinetickou energii v rovnovážné poloze s jeho potenciální energií v bodě maximální výchylky. Jako hladinu nulové potenciální energie uvažuj rovnovážnou polohu.

$l = 1\,\mathrm{m}$, $m = 0,5\,\mathrm{kg}$, $y_m = 5\,\mathrm{cm} = 0,05\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

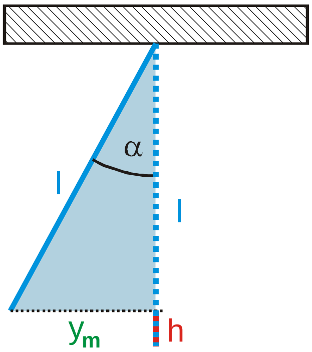
Kinetická energie v rovnovážné poloze:

$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}m\left(\omega y_m\right)^2$ (použijeme $v_m = \omega y_m$)

Úhlovou rychlost určíme ze vztahu pro periodu: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{2\pi}{T} = \omega \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} = \omega$.

$$E_k = \frac{1}{2}m(\omega y_m)^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{g}{l}}y_m\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}y_m^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,5\cdot\frac{10}{1}\cdot 0,05^2\ \text{J} = 6,25\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Potenciální energie v bodě maximální výchylky: $E_p = mgh$.



Výšku nad rovnovážnou polohou určíme z modrého pravoúhlého trojúhelníku:

$$(l-h)^2 = l^2 - y_m^2$$

$$l - h = \sqrt{l^2 - y_m^2}$$

$$l - \sqrt{l^2 - y_m^2} = h$$

$$E_p = mgh = mg\left(l - \sqrt{l^2 - y_m^2}\right) = 0,5\cdot 10\left(1 - \sqrt{1^2 - 0,5^2}\right)\text{J} = 6,254\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Vypočtené hodnoty nejsou zcela stejné, což není překvapivé. Při odvozování vztahu pro periodu jsme nerozlišovali mezi výchylkou a vodorovnou výchylkou. Všechny naše výsledky jsou proto pouze přibližné.

Dodatek: Fyzické kyvadlo: - sledujeme pevné těleso, které se otáčí okolo osy, která neprochází jeho těžištěm. Dva vzorce:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$ (J – moment setrvačnosti, m – hmotnost, d – vzdálenost těžiště od osy otáčení)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (L – redukovaná délka, můžeme ji určit experimentálně výpočtem ze změřené periody, nebo výpočtem $L = \frac{J}{md}$)

Shrnutí: Perioda kyvadla závisí na jeho délce a velikosti tíhového zrychlení.