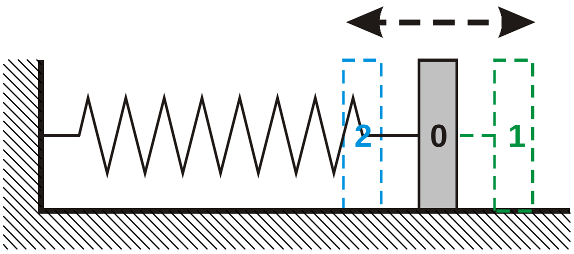
3.1.8 Přeměny energie v mechanickém oscilátoru

Předpoklady: 010502, 030107

Pedagogická poznámka: Odvození zákona zachování energie provádím na vodorovné pružině, protože je přímočařejší. Pro zájemce je uvedeno na konci hodiny.

Př. 1: Na vodorovně umístěné pružině kmitá ve vodorovném směru závaží. Tření mezi závažím a podložkou je zanedbatelně malé. Popiš, jak se mění energie závaží během jedné periody (během pohybu mezi body 0-1-0-2-0).



Závaží se pohybuje z rovnovážné polohy do maximální kladné výchylky (z bodu 0 do bodu 1):

- velikost rychlosti závaží se zmenšuje ⇒ kinetická energie závaží se zmenšuje,
- velikost výchylky závaží se zvětšuje ⇒ zvětšuje se prodloužení pružiny ⇒ zvětšuje se potenciální energie pružiny.

Závaží se pohybuje z maximální kladné výchylky do rovnovážné polohy (z bodu 1 do bodu 0):

- velikost rychlosti závaží se zvětšuje ⇒ kinetická energie závaží se zvětšuje,
- velikost výchylky závaží se zmenšuje ⇒ zmenšuje se prodloužení pružiny ⇒ zmenšuje se potenciální energie pružnosti.

Závaží se pohybuje z rovnovážné polohy do maximální záporné výchylky (z bodu 0 do bodu 2):

- velikost rychlosti závaží se zmenšuje ⇒ kinetická energie závaží se zmenšuje,
- velikost výchylky závaží se zvětšuje ⇒ zvětšuje se zkrácení pružiny ⇒ zvětšuje se potenciální energie pružiny.

Závaží se pohybuje z maximální záporné výchylky do rovnovážné polohy (z bodu 2 do bodu 0):

- velikost rychlosti závaží se zvětšuje ⇒ kinetická energie závaží se zvětšuje,
- velikost výchylky závaží se zmenšuje ⇒ zmenšuje se zkrácení pružiny ⇒ zmenšuje se potenciální energie pružiny.

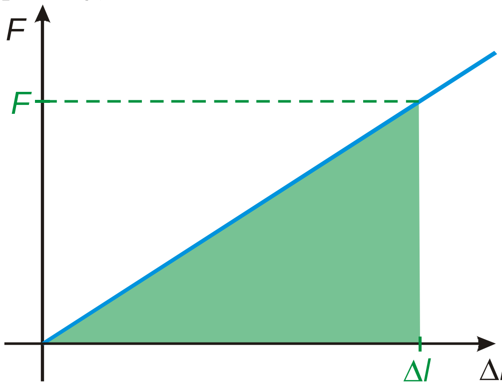
Př. 2: Proč v předchozím příkladu nerozebíráme klasické kmitání závaží na svislé pružině?

Kromě kinetické energie závaží a potenciální energie pružiny se v při kmitání ve svislém směru mění i potenciální energie závaží. Příklad je tak složitější.

Situace vodorovně kmitajícího závaží na pružině velmi připomíná kyvadlo: během kmitání se neustále přeměňují dva druhy energie jeden v druhý ⇒ zřejmě se jedná o obecnou vlastnost kmitavého pohybu.

Pokusíme se početně dokázat, že celková energie kmitání se v průběhu periody nemění $\Rightarrow$ potřebujeme vzorec po velikost potenciální energie pružiny.

Opakování z prvního ročníku:
Vzorce pro energie jsme získávali jako vzorce pro vykonanou práci: $W = F \cdot s$.
Problém: síla, kterou je pružina stlačována (natahována), se mění se změnou délky. Velikost síly je dána vztahem $F = k\Delta l$, síla přímo úměrně roste se stlačením (prodloužením) $\Rightarrow$ nemůžeme tedy použít klasický vztah pro práci, protože síla se neustále mění.
$\Rightarrow$ Práci určíme jako plochu pod grafem závislosti působící síly na dráze (tzn. na stlačení pružiny).



V grafu je nakreslena plocha pod grafem znázorňující vykonanou práci při stlačení od nuly do Δl - pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $F = k\Delta l$ (největší působící síla) a Δl (největší stlačení).

$$W = S_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{F \cdot \Delta l}{2} = \frac{k\Delta l \cdot \Delta l}{2} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Potenciální energie pružiny $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ $\Rightarrow$ energie závisí pouze na druhé mocnině prodloužení $\Rightarrow$ nezáleží na tom, zda se pružina prodloužila nebo zkrátila $\Rightarrow$ místo Δl můžeme psát y $\Rightarrow$ $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}ky^2$.

Pro celkovou energii pružiny v každém okamžiku platí: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$.

Dosadíme vztahy pro okamžité hodnoty: $v = \omega y_m \cos(\omega t)$, $y = y_m \sin(\omega t)$.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\left[\omega y_m \cos(\omega t)\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[y_m \sin(\omega t)\right]^2 =$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2(\omega t)$$

Z pohybové rovnice mechanického oscilátoru: $F = -ky = -m\omega^2 y$ $\Rightarrow$ $m\omega^2 = k$.

$$E = \frac{1}{2}ky_m^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}ky_m^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2}ky_m^2 \cdot 1 = \frac{1}{2}ky_m^2$$

Opačné dosazení: $k = m\omega^2$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}mv_m^2 \cdot 1 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

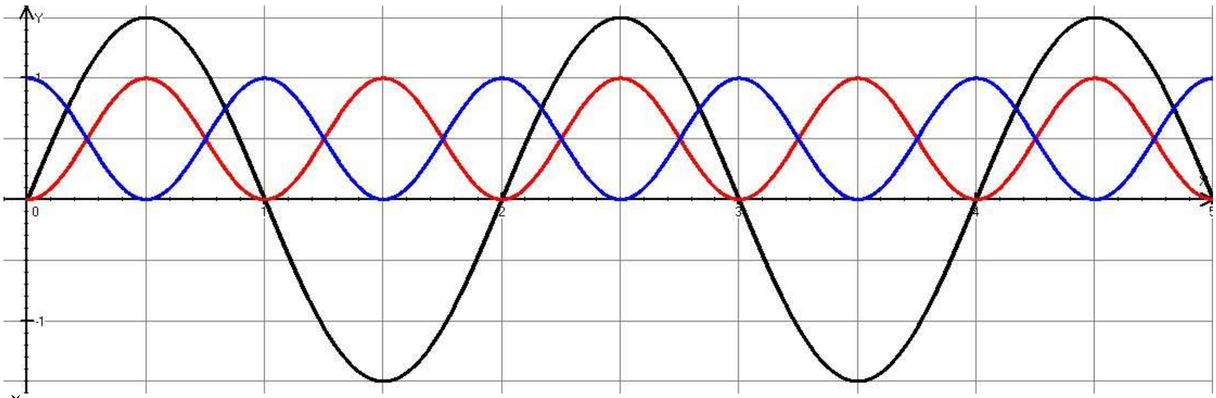
$\Rightarrow$ celková energie (součet kinetické energie závaží a potenciální energie pružiny) se během kmitavého pohybu nemění a její velikost se rovná:

- $E = \frac{1}{2}ky_m^2$ - potenciální energii pružiny v maximální výchylce,
- $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ - kinetické energii závaží v okamžiku průchodu rovnovážnou polohou.

Př. 3: Urči periodu, se kterou se mění kinetická energie závaží, pokud závaží kmitá s periodou 2,4 s.

Kinetická energie závaží osciluje mezi nulovou a maximální hodnotou. Nulové hodnoty dosahuje během jednoho kmitu dvakrát (v kladné i záporné extrémní výchylce), maximální hodnoty také (při průchodu rovnovážnou polohou) $\Rightarrow$ kinetická energie se mění s poloviční periodou než je perioda kmitů závaží $\Rightarrow$ $T_E = 1,2\,\mathrm{s}$.

Př. 4: Na obrázku je graf, který zachycuje časový průběh výchylky, kinetické a potenciální energie mechanického oscilátoru. Urči, který graf náleží ke které veličině.



Černá čára má poloviční frekvenci než zbývající dvě, má kladné i záporné hodnoty $\Rightarrow$ jde o graf výchylky.
Modrá čára dosahuje maximální hodnoty v okamžicích, kdy je výchylka nulová $\Rightarrow$ v těchto okamžicích je maximální rychlost $\Rightarrow$ jde o graf kinetické energie.
Červená čára dosahuje maximální hodnoty v okamžicích, kdy je velikost výchylky maximální $\Rightarrow$ jde o graf potenciální energie.

Stejné vzorce platí i v případě, že pružina je svislá a závaží kmitá ve svislém směru.

Př. 5: Na pružině o tuhosti $20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ kmitá závaží o hmotnosti 200 g s maximální výchylkou $4\,\mathrm{cm}$. Urči:
a) celkovou energii oscilátoru,
b) periodu, frekvenci a úhlovou frekvenci kmitání,
c) rovnice pro okamžitou výchylku a okamžitou rychlost,
d) hodnoty okamžité výchylky a okamžité rychlosti v čase $t = 0{,}1\,\mathrm{s}$,
e) hodnoty kinetické a potenciální a celkové energie v čase $t = 0{,}1\,\mathrm{s}$.

$k = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, $y_m = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$, $t = 0{,}1\,\mathrm{s}$

a) celková energie oscilátoru

$$E = \frac{1}{2}ky_m^2 = \frac{1}{2}20\cdot 0{,}04^2\,\mathrm{J} = 0{,}016\,\mathrm{J}$$

b) perioda, frekvence a úhlová frekvence kmitání

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{20}}\,\mathrm{s} = 0{,}63\,\mathrm{s} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20}{0{,}2}}\,\mathrm{Hz} = 1{,}6\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

c) rovnice pro okamžitou výchylku a okamžitou rychlost

$$y = y_m \sin(\omega t) = 0,04\cdot\sin(10t)$$

$$v_m = \omega y_m = 10\cdot 0,04\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 0,4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v = v_m \cos(\omega t) = 0,4\cos(10t)$$

d) hodnoty okamžité výchylky a okamžité rychlosti v čase $t = 0,1\,\mathrm{s}$,

$$y = 0,04\cdot\sin(10t) = 0,04\cdot\sin(10\cdot 0,1)\,\mathrm{m} = 0,034\,\mathrm{m}$$

$$v = 0,4\cos(10t) = 0,4\cos(10\cdot 0,01)\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 0,22\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

e) hodnoty kinetické a potenciální a celkové energie v čase $t = 0,1\,\mathrm{s}$.

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}20\cdot 0,034^2\,\mathrm{J} = 0,012\,\mathrm{J} \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot 0,22^2\,\mathrm{J} = 0,0048\,\mathrm{J}$$

$$E = E_p + E_k = 0,012 + 0,0048\,\mathrm{J} = 0,0168\,\mathrm{J}$$

Výsledek se dobře shoduje s hodnotou vypočtenou v bodě a), malý rozdíl je způsobem chybou v zaokrouhlování.

Zatím jsme se zabývali pouze kmitáním jehož výchylka se nezmenšuje. U skutečného kmitání se výchylka vždy postupně zmenšuje až se kmitání zastaví $\Rightarrow$ **reálné kmitání je vždy tlumené**.

Př. 6: Co způsobí postupné utlumení kmitů závaží na pružině?

Působení sil:

- odpor vzduchu,
- vnitřní tření při změnách tvaru pružiny.

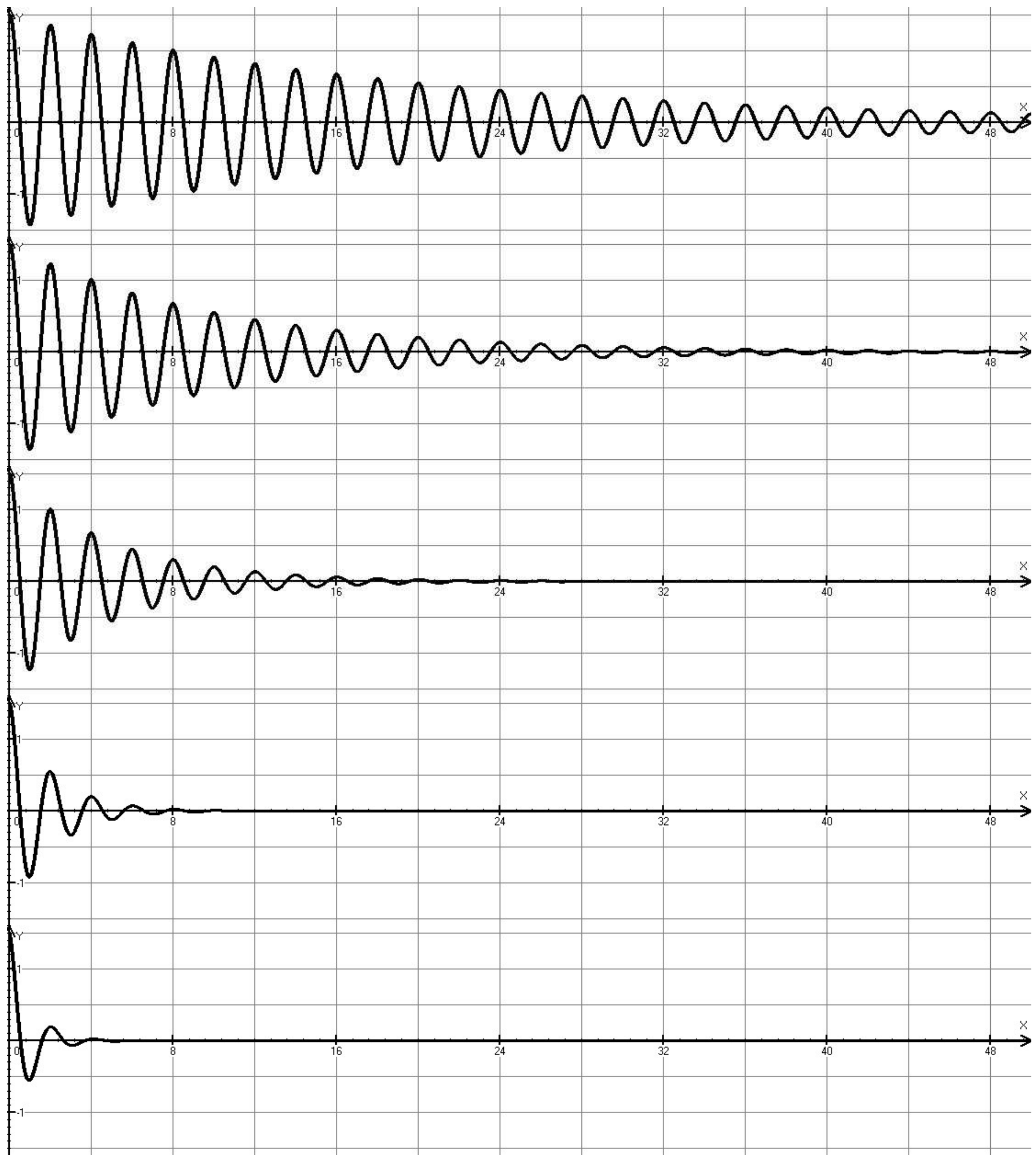
Změny tlumení:

- Vzduchoprázdno: tlumení se zmenší (nepůsobí odpor vzduchu), ale pružina se časem stejně zastaví, ztráty při změnách tvaru pružiny zůstanou $\Rightarrow$ pružina se zastaví pomaleji.
- Voda: tlumení se zvětší (odpor vody je větší než odpor vzduchu) $\Rightarrow$ pružina se zastaví rychleji.

Př. 7: Kterou další veličinu charakterizující kmitavý pohyb ovlivňuje velikost tlumení.

Zvětšující se tlumení prodlužuje periodu kmitů (zpomaluje například pohyb z maximální výchylky do rovnovážné polohy).

Grafy kmitavého pohybu s postupně se zvětšujícím tlumením. Fáze kmitavého pohybu je taková, aby pohyb začínal v největší kladné výchylce (je tedy popsán rovnicí $y = y_m \cos(\omega t)$).

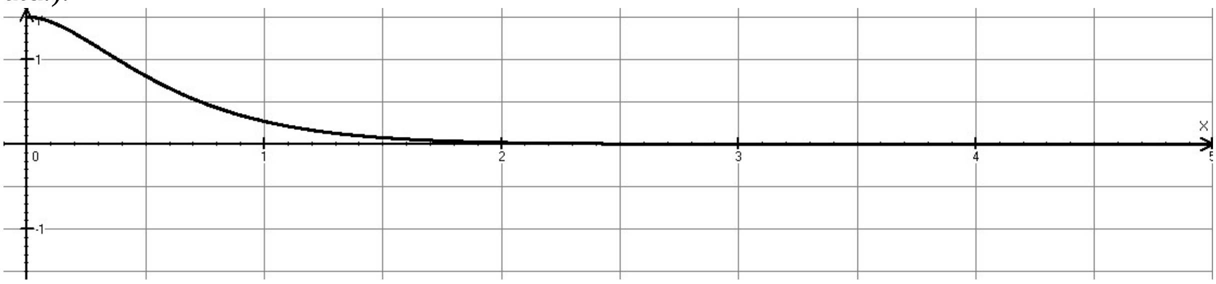


Př. 8: Odhadni, kterou funkcí by bylo třeba doplnit rovnici pro výchylku harmonického kmitání $y = y_m \cos(\omega t)$, aby se amplituda kmitů postupně zvěšovala.

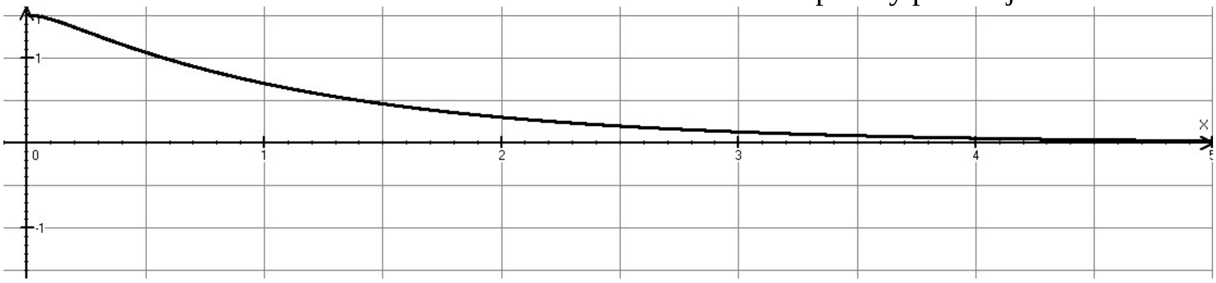
Z grafů je vidět, že výchylka se snižuje k nule. Čím je aktuální hodnota výchylky větší, tím rychlejší je pokles $\Rightarrow$ takto se chová exponenciální funkce se základem menším než jedna (nebo se záporným exponentem) $\Rightarrow$ rovnice $y = e^{-bt} \cdot y_m \cos(\omega t)$, kde b je parametr, který udává velikost tlumení.

Dodatek: Správná rovnice ještě musí popsat prodloužení periody pohybu $\Rightarrow$ $y = e^{-bt} \cdot y_m \cos(\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ (ω_0 - úhlová frekvence bez tlumení, ω - úhlová frekvence s tlumením.

Mezní (kritické) tlumení:oscilátor „nepřekmitne“ a za nejkratší možný čas se vrátí do rovnovážné polohy $\Rightarrow$ technicky důležité, přesně toho chceme dosáhnout v situacích, kde nestojíme o rozkmitání (pérování automobilů, samozavírání dveří, pohyb měřících ručiček, atd.).

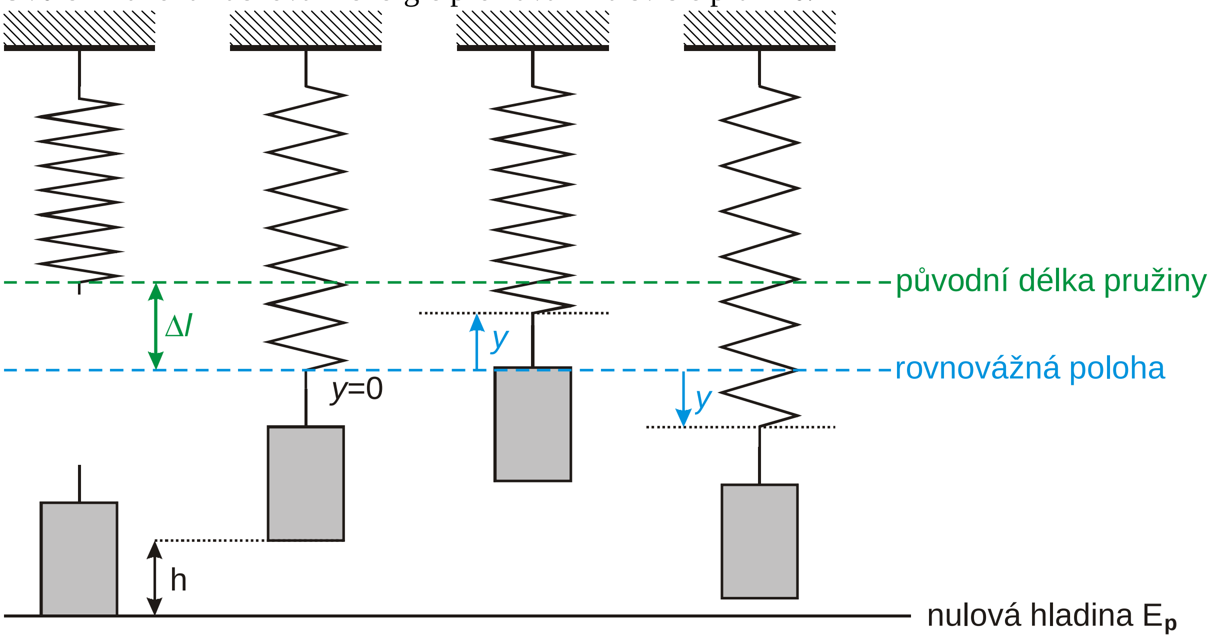


Při dalším zvětšování tlumení se oscilátor vrací do rovnovážné polohy pomaleji.



Pedagogická poznámka: Zde za normálních podmínek končím hodinu.

Ověření zákona zachování energie pro závaží na svislé pružině.



Po zavěšení závaží se pružina prodlouží o Δl a změní se výška (a tím i potenciální energie) závaží $\Rightarrow$ klidová energie oscilátoru $E_0 = mgh + \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$.

V libovolném okamžiku při okamžité výchylce *y* a okamžité rychlosti *v* má oscilátor tyto druhy energie:

- kinetickou $E_k = \frac{1}{2}mv^2$,

- potenciální $E_p = mg(h+y)$: při záporné výchylce je výška závaží menší,
- potenciální pružiny $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l - y)^2$: záporná výchylka znamená menší prodloužení.

Upravujeme výraz:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h+y) + \frac{1}{2}k(\Delta l - y)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + mgy + \frac{1}{2}k\left[(\Delta l)^2 - 2\Delta ly + y^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}k2\Delta ly + \frac{1}{2}ky^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - k\Delta ly + \frac{1}{2}ky^2$$

Platí: $F = mg = k\Delta l$ (síla, kterou závaží napíná pružinu v rovnovážné poloze) $\Rightarrow$ $mgy - k\Delta ly = 0$.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}ky^2 = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$E_c = E_0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$ $\Rightarrow$ energie kmitání: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$ (stejný výsledek jako u pružiny kmitající vodorovně).

Př. 9: Pružina se po zavěšení závaží o hmotnosti 300 g prodloužila o 4 cm. Urči celkovou energii tohoto oscilátoru při maximální výchylce 5 cm.

$m = 300\,\text{g} = 0{,}3\,\text{kg}$, $\Delta l = 4\,\text{cm} = 0{,}04\,\text{m}$, $y_m = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$, $E_c = ?$

Vzorec pro celkovou energii: $E_c = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}ky_m^2$ (poslední člen se rovná hodnotě potenciální energie pružiny v bodě maximální výchylky, kdy je kinetická energie nulová).

$F = k \cdot \Delta l \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$.

$$E_c = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}ky_m^2 = mgh + \frac{1}{2}\frac{mg}{\Delta l}(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{\Delta l}y_m^2 = mg\left(h + \frac{\Delta l}{2} + \frac{y_m^2}{2 \cdot \Delta l}\right)$$

Za hladinu nulové potenciální energie zvolíme rovnovážnou polohu $\Rightarrow$ $h = 0$.

$$E_c = mg\left(h + \frac{\Delta l}{2} + \frac{y_m^2}{2 \cdot \Delta l}\right) = 0{,}3 \cdot 10\left(0 + \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}05^2}{2 \cdot 0{,}04}\right)\text{J} = 0{,}15\,\text{J}$$

Celková energie kyvadla je 0,15 J.

Pedagogická poznámka: Určitě stojí za to upozornit studenty, že všechny členy v závorce mají význam délky (bez ohledu na to, jak vznikly). Jinak to samozřejmě být nemůže, ale pro studenty je to určitě překvapivé.

Shrnutí: Zákon zachování mechanické energie platí i pro netlumené kmitání.