

3.2.2 Rovnice postupného vlnění

Předpoklady: 3102, 3201

Chceme najít rovnici, která bude udávat výšku vlny v libovolném okamžiku i libovolném bodě (v jednom okamžiku je v různých místech různá výška vlny).

Veličiny popisující vlnění (hodnoty budou pro jedno vlnění stejné pro všechna místa ve všech okamžicích):

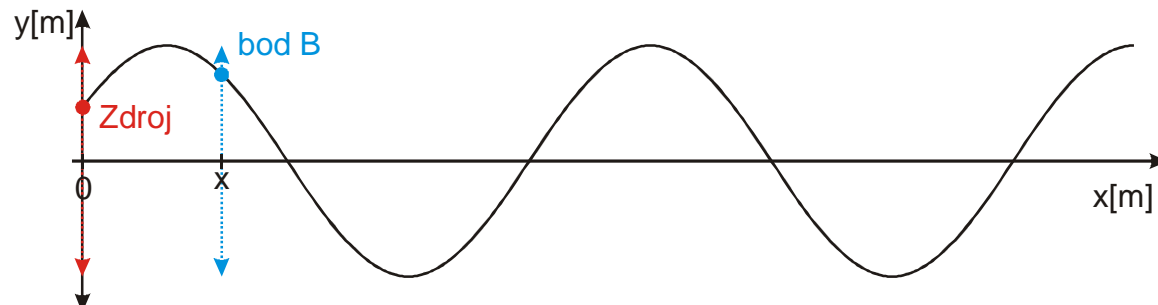
- perioda T ,
- maximální výchylka y_m ,
- rychlost šíření v ,
- vlnová délka λ .

Veličiny popisující místo a čas, o které se zajímáme (dosadíme je do rovnice, abychom získali konkrétní údaje):

- čas t ,
- poloha x .

Pedagogická poznámka: Při odvozování vzorce je třeba žákům ujasnit, že použitý graf se liší od grafů používaných v kapitole o kmitavých pohybech. Někdy může být diskuse delší, ale pokud mají studenti pochopit vzorec, je nutné ji neošidit.

Vodní hladina v určitém okamžiku:



Každý bod kmitá, ale máme ho zachycen v jednom okamžiku (**na vodorovné ose není čas, ale poloha**, jde tedy o „fotku“ ne zachycení změn v čase jako v grafech, které jsme používali u kmitavých pohybů, analogií této „fotky“ pro kmitající závaží by byl graf s jediným bodem).

Zdroj: $y = y_m \sin(\omega t)$ (známe, rovnice kmitavého pohybu)

Bod B: kmitá „stejně“ jako zdroj, ale o něco později. Tento rozdíl označíme $\Delta t \Rightarrow$

$y = y_m \sin[\omega(t - \Delta t)]$ (Δt jsme přidali, protože bod B je pozadu, chvíli trvá než se k němu vlnění dostane). Na čem Δt závisí?

- rychlost šíření vlnění v ,
- vzdálenost bodu B od zdroje x ,

$\Rightarrow \Delta t = \frac{x}{v}$, dosadíme do rovnice pro B: $y = y_m \sin[\omega(t - \Delta t)]$.

$$y = y_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \quad \text{rozepíšeme } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y = y_m \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T v} \right) \quad \text{použijeme } \lambda = vT$$

$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ - **rovnice postupného vlnění** (udává okamžitou výchylku v závislosti na čase a poloze).

Důležité:

- t, x - neznámé, za které dosazujeme (v jaké okamžiku a na kterém místě, chceme znát výšku vlny),
- y_m, T, λ - parametry, které jsou pro dané vlnění stále stejné .

Poznámka: Námi uvedená rovnice platí pro vlnění, které se šíří ve směru osy x (od menších hodnot x ke větším). Pro vlnění opačného směru je nutno změnit znaménko před členem $\frac{x}{\lambda}$

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right).$$

Pedagogická poznámka: Předchozí rozlišení neznámých a parametrů je nutné studentům zdůraznit. Rozdílná role písmenek v rovnici je jedním z největších problémů při jejím pochopení.

Př. 1: Vysvětli jaký je rozdíl mezi t a T v rovnici postupného vlnění

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

t – čas, ve kterém chceme zjistit stav vlnění, volíme si ho dle libosti

T – perioda kmitavého pohybu, který vlnění způsobuje. Je pro dané vlnění stále stejná.

Jak fungují zlomky v závorce?

- $\frac{t}{T} = k \in Z$ (celé číslo) $\Rightarrow \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = \sin 2\pi k = 0$, právě když $t = kT$ - zopakoval se určitý počet celých period (a proto začíná vlnění opět s počáteční fází),
- $\frac{x}{\lambda} = k \in Z$ (celé číslo) $\Rightarrow \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) = \sin 2\pi k = 0$, právě když $x = k\lambda$ - posunuli jsme se o určitý počet celých vlnových délek (a proto vlnění kmitá v našem bodě se stejnou fází jako v počátku).

Př. 2: Vlnky na vodní hladině se šíří rychlostí $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ s periodou 0,6 sekundy. Napiš rovnici tohoto postupného vlnění, pokud maximální výška vlny dosahuje 3 cm.

Rovnice postupného vlnění: $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$.

Známe: $y_m = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$, $T = 0,6 \text{ s}$.

Musíme určit λ : $\lambda = vT = 0,1 \cdot 0,6 \text{ m} = 0,06 \text{ m}$.

Dosadíme do rovnice: $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,06} \right)$.

Př. 3: Vlnění na vodní hladině je popsáno rovnicí $y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right)$.

a) Urči hodnoty y_m , T , λ , v .

b) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0 \text{ s}$. Předpokládej, že v čase 0 s jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

c) Urči v čase $t = 0 \text{ s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 0,03; 0,09; 0,11; 0,13$.

Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu b).

d) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0,45 \text{ s}$. Předpokládej, že v čase 0 s jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

e) Urči v čase $t = 0,45 \text{ s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 0,03; 0,09; 0,11; 0,13$.

Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu d).

a) Urči hodnoty y_m , T , λ , v .

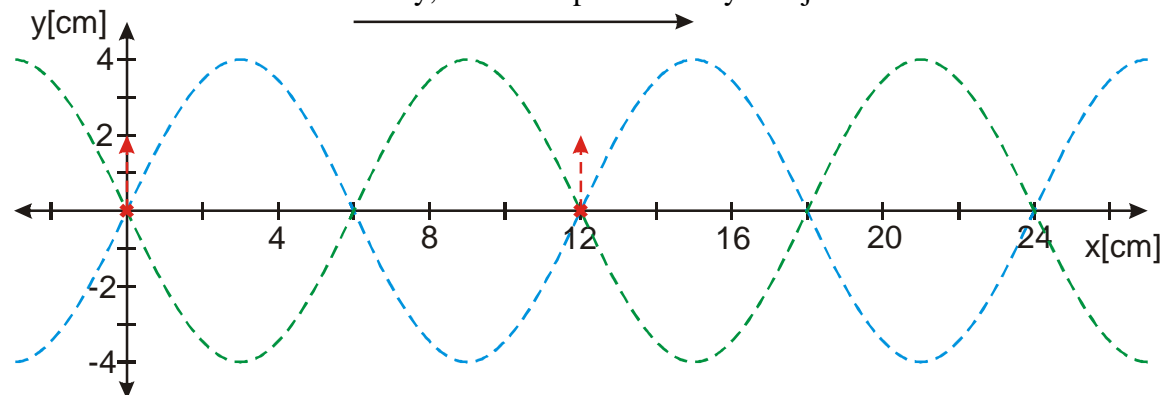
Obecná rovnice: $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, naše rovnice $y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right)$

srovnáním získáme:

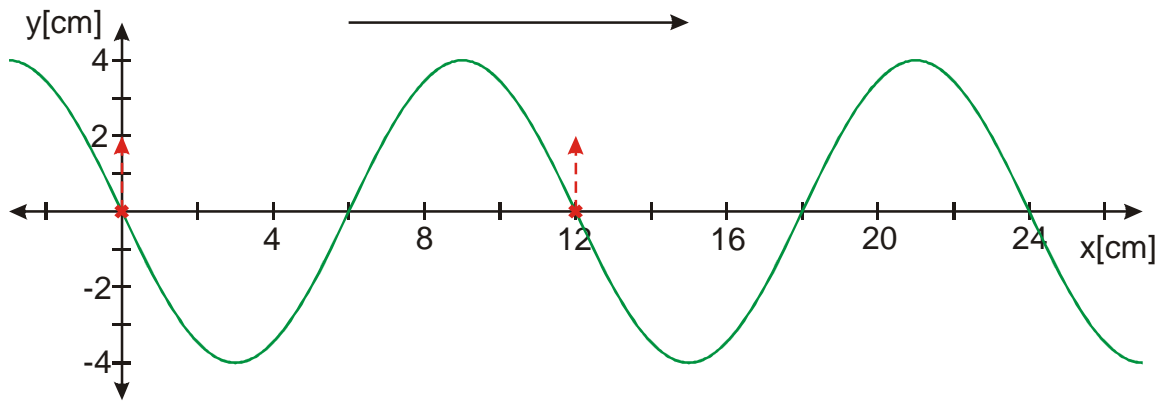
- $y_m = 0,04 \text{ m}$
- $T = 0,6 \text{ s}$
- $\lambda = 0,12 \text{ m}$
- $\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,12}{0,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0 \text{ s}$. Předpokládej, že v čase 0 s jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

V čase $t = 0 \text{ s}$ se bod v počátku nachází na začátku sinusovky s nulovou výchylkou, stejnou fází bude mít pohyb bodu, který se nachází o jednu vlnovou délku (0,12 m) dále vpravo \Rightarrow můžeme nakreslit dvě sinusovky, které této podmínce vyhovují.



Vlnění se šíří vpravo, vyznačené body se pohybují směrem nahoru (jsou na začátku periody) \Rightarrow správná je zelená křivka.

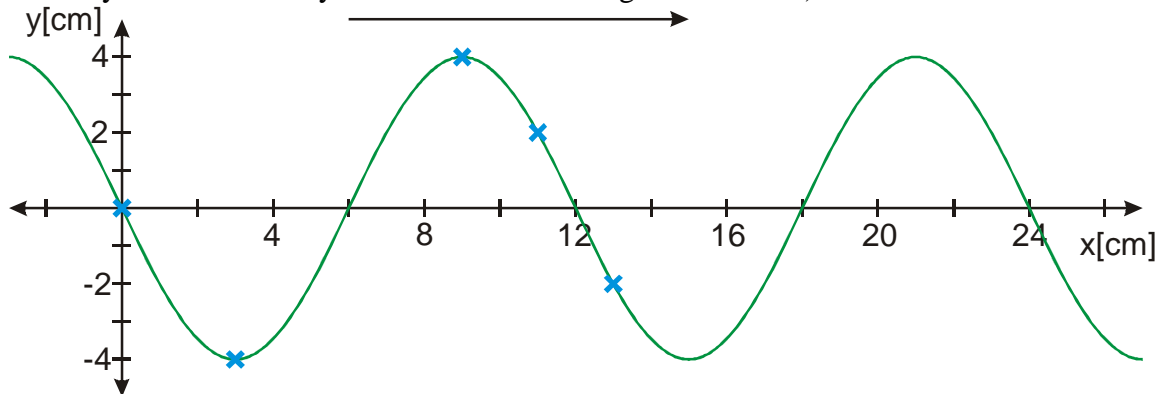


c) Urči v čase $t = 0\text{ s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 0,03; 0,09; 0,11; 0,13$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu b).

do rovnice vlnění dosazujeme $t = 0\text{ s}$ a:

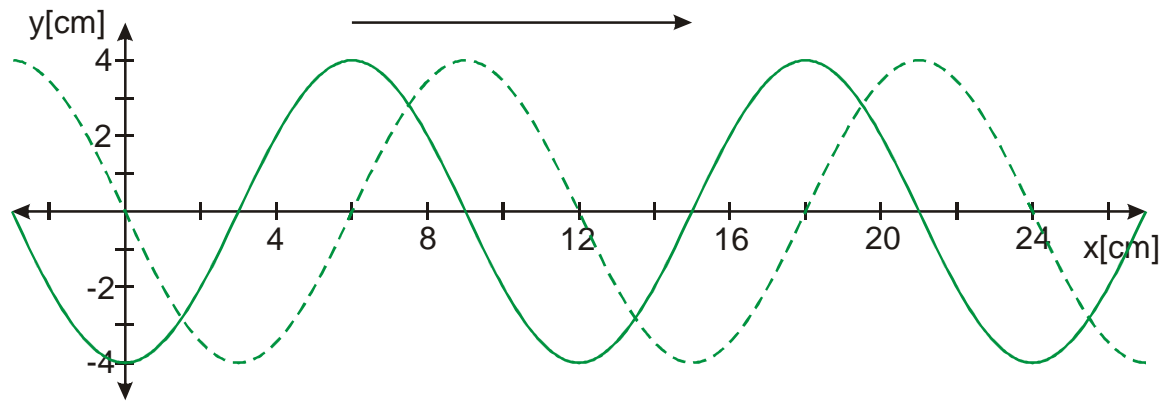
- $x = 0\text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0}{0,6} - \frac{0}{0,12} \right) \text{ m} = 0\text{ m}$
- $x = 0,03\text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0}{0,6} - \frac{0,03}{0,12} \right) \text{ m} = -0,04\text{ m}$
- $x = 0,09\text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0}{0,6} - \frac{0,09}{0,12} \right) \text{ m} = 0,04\text{ m}$
- $x = 0,11\text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0}{0,6} - \frac{0,11}{0,12} \right) \text{ m} = 0,02\text{ m}$
- $x = 0,13\text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0}{0,6} - \frac{0,13}{0,12} \right) \text{ m} = -0,02\text{ m}$

Všechny získané hodnoty můžeme dokreslit do grafu z bodu b)



d) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti $0 - 15\text{ cm}$ v čase $t = 0,45\text{ s}$. Předpokládej, že v čase 0 s jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

V čas $t = 0,45\text{ s}$ uplyne od času $t = 0\text{ s}$ tři čtvrtě periody \Rightarrow vlna se posunu doprava o tři čtvrtě vlnové délky \Rightarrow v počátku se zrovna nachází minimum.

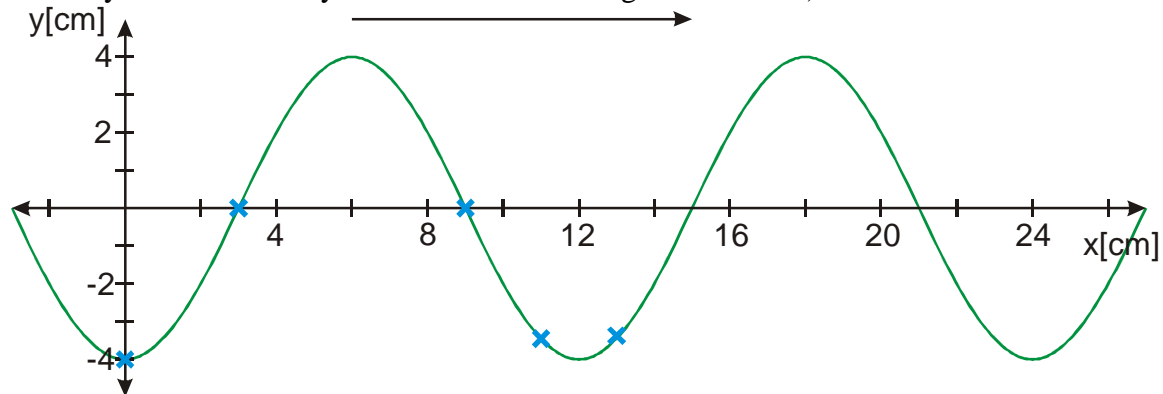


e) Urči v čase $t = 0,45$ s výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 0,03; 0,09; 0,11; 0,13$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu d).

Do rovnice vlnění dosazujeme $t = 0,45$ s a:

- $x = 0 \text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0}{0,12} \right) \text{ m} = -0,04 \text{ m}$
- $x = 0,03 \text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,03}{0,12} \right) \text{ m} = 0 \text{ m}$
- $x = 0,09 \text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,09}{0,12} \right) \text{ m} = 0 \text{ m}$
- $x = 0,11 \text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,11}{0,12} \right) \text{ m} = -0,035 \text{ m}$
- $x = 0,13 \text{ m} : y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12} \right) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,13}{0,12} \right) \text{ m} = -0,035 \text{ m}$

Všechny získané hodnoty můžeme dokreslit do grafu z bodu d).



Př. 4: Vlnění je popsáno rovnicí $y = 0,3 \sin(2t - 5x)$. Urči hodnoty y_m , T , λ , v .

Obecná rovnice: $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, naše rovnice $y = 0,3 \sin(2t - 5x) \Rightarrow$ problém:

v obecné rovnici je před závorkou vytknuto $2\pi \Rightarrow$ musíme v obecné rovnici roznásobit závorku nebo v zadané rovnici vytknout 2π .

$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = y_m \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$ srovnáváme $y = 0,3 \sin(2t - 5x)$:

- $y_m = 0,3 \text{ m}$,
- $\frac{2\pi t}{T} = 2t \Rightarrow T = \pi \text{ s} = 3,14 \text{ s}$,
- $\frac{2\pi x}{\lambda} = 5x \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{5} \text{ m} = 1,3 \text{ m}$.

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,3}{3,14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Př. 5: Vlnění vodní hladiny je popsáno rovnicí $y = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,06} \right)$.

- Urči výšku vlny v místě zdroje vlnění v čase $t = 1 \text{ s}$.
- Urči výšku vlny v místě vzdáleném od zdroje $5,5 \text{ cm}$ v čase $t = 1 \text{ s}$.
- Urči poloměr nejmenší kružnice, kterou tvoří body kmitající se stejnou fází jako zdroj vlnění.

a) Urči výšku vlny v místě zdroje vlnění v čase $t = 1 \text{ s}$.

Do rovnice vlnění dosadíme $t = 1 \text{ s}$ a $x = 0 \text{ m}$:

$$y = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,06} \right) = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{1}{0,6} - \frac{0}{0,06} \right) \text{ m} = -0,026 \text{ m}.$$

b) Urči výšku vlny v místě vzdáleném od zdroje $5,5 \text{ cm}$ v čase $t = 1 \text{ s}$.

Do rovnice vlnění dosadíme $t = 1 \text{ s}$ a $x = 0,055 \text{ m}$:

$$y = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,06} \right) = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{1}{0,6} - \frac{0,055}{0,06} \right) \text{ m} = 0,03 \text{ m}.$$

c) Urči poloměr nejmenší kružnice, kterou tvoří body kmitající se stejnou fází jako zdroj vlnění.

Se stejnou fází kmitají body, které jsou od sebe vzdáleny o celočíselný násobek vlnové délky \Rightarrow hledaná kružnice má poloměr 6 cm .

Dodatek: Použitá rovnice nepopisuje vlnění vodní plochy ve všech směrech. Popisuje výšku vln pouze na kladné poloose x . Na záporné poloose x se vlnění šíří opačným směrem (a je tedy popsáno rovnicí $y = 0,03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,6} + \frac{x}{0,06} \right)$). V ostatních směrech je rovnice složitější, protože výchylka závisí na druhé souřadnici.

Shrnutí: Dosazováním za čas a x -ovou souřadnici do rovnice $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ můžeme zjistit okamžitou výchylku vlnění v libovolném místě a čase.