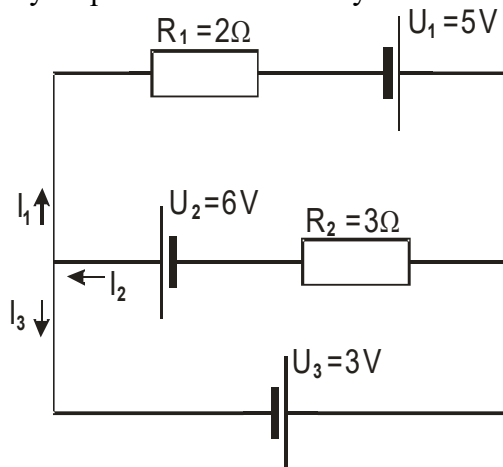


4.2.19 Řešení elektrických sítí pomocí Kirchhoffových zákonů

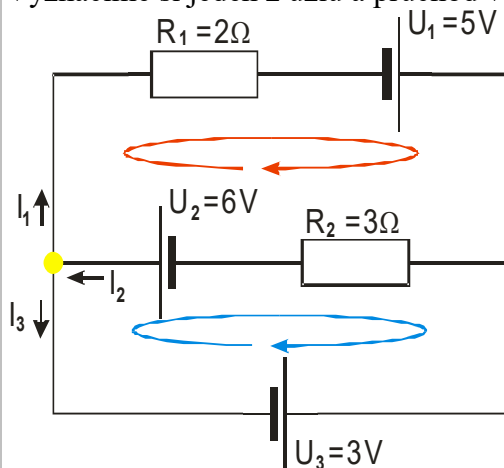
Předpoklady: 4218

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje čtyři obvody. Fyzikálně mezi nimi není velký rozdíl, druhé dva jsou však podstatně obtížnější po matematické stránce (nejsou předem připravené na hezké řešení a tak způsobí ve třídě slušný chaos). U prvních dvou příkladů jsou vyznačeny i směry proudů pro snadnější kontrolu, u zbývajících dvou si proudy značí každý sám. Mezi obě dvojice příkladů je vloženo zamyšlení nad sestavováním znaménkové konvence pro 2. Kirchhoffův zákon.

Př. 1: Vyřeš pomocí Kirchhoffových zákonů elektrickou síť.



Vyznačíme si jeden z uzlů a průchod ve dvou ze tří smyček.



Uzel: $I_2 = I_1 + I_3$.

Červená smyčka: $R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_1 + U_2$.

Modrá smyčka: $-R_2 I_2 = -U_2 - U_3$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé \Rightarrow pouze matematický problém se soustavou tří rovnic.

Dosadíme hodnoty:

$$I_2 = I_1 + I_3$$

$$2 I_1 + 3 I_2 = 5 + 6$$

$$-3 I_2 = -6 - 3$$

Upravíme soustavu.

$$I_2 = I_1 + I_3$$

$$2I_1 + 3I_2 = 11$$

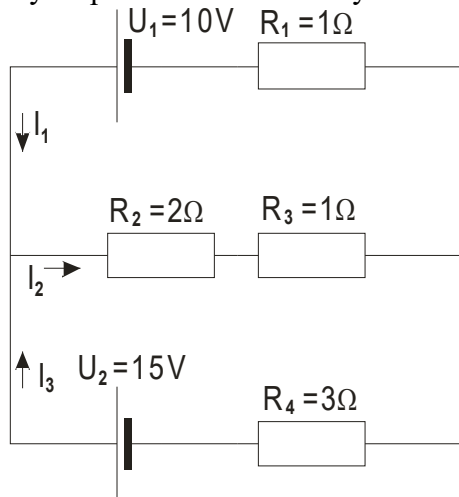
$$3I_2 = 9 \Rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

Dosadíme: $2I_1 + 3I_2 = 11 \Rightarrow 2I_1 + 3 \cdot 3 = 11 \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A}$.

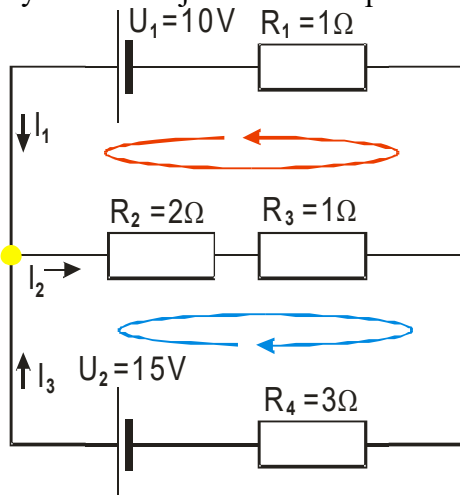
Dosadíme: $I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow 3 = 1 + I_3 \Rightarrow I_3 = 2 \text{ A}$.

Všechny proudy vyšly kladné \Rightarrow směr proudů jsme odhadli dobře a na obrázku nemusíme nic měnit.

Př. 2: Vyřeš pomocí Kirchhoffových zákonů elektrickou síť na obrázku.



Vyznačíme si jeden z uzlů a průchod ve dvou ze tří smyček.



Uzel: $I_2 = I_1 + I_3$.

Červená smyčka: $R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_2 = U_1$.

Modrá smyčka: $R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_4 I_3 = U_2$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé \Rightarrow pouze matematický problém se soustavou tří rovnic.

Dosadíme hodnoty:

$$I_2 = I_1 + I_3$$

$$1I_1 + 2I_2 + 1I_2 = 10$$

$$2I_2 + 1I_2 + 3I_3 = 15$$

Upravíme soustavu.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 + 3I_2 = 10$$

$$3I_2 + 3I_3 = 15$$

Ze třetí rovnice vydělíme 3 a vypočteme z ní I_3 : $I_2 + I_3 = 5 \Rightarrow I_3 = 5 - I_2$.

Z druhé rovnice vyjádříme I_1 : $I_1 + 3 I_2 = 10 \Rightarrow I_1 = 10 - 3 I_2$.

Dosadíme do první rovnice.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 10 - 3 I_2 - I_2 + 5 - I_2 = 0$$

$$15 = 5 I_2 \Rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

Dopočítáme zbývající proudy:

$$I_1 = 10 - 3 I_2 = 10 - 3 \cdot 3 \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = 5 - I_2 = 5 - 3 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

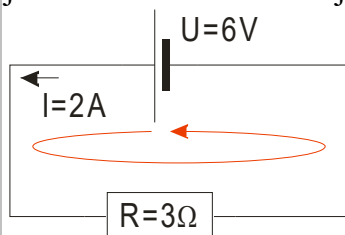
Všechny proudy vyšly kladné \Rightarrow směr proudů jsme odhadli dobře a na obrázku nemusíme nic měnit.

Pedagogická poznámka: Před následujícím příkladem synchronizuji třídu, aby si všichni mohli zauvažovat znaménkových konvencích.

Př. 3: Najdi postup, kterým je možné ověřit, případně znovu zformulovat správné znaménkové konvence pro 2. Kirchhoffův zákon.

Pamatujeme si, že součet úbytků na spotřebičích se v uzavřené smyčce musí rovnat součtu elektromotorických napětí. Jak zavedeme znaménkové konvence? Kdo si má pamatovat, kdy je co kladné?

Nakreslíme si velmi jednoduchý příklad, který známe – nejjednodušší obvod se zdrojem a jedním rezistorem. Uvažujeme jednoduché, konkrétní hodnoty. Proud teče od + i -.



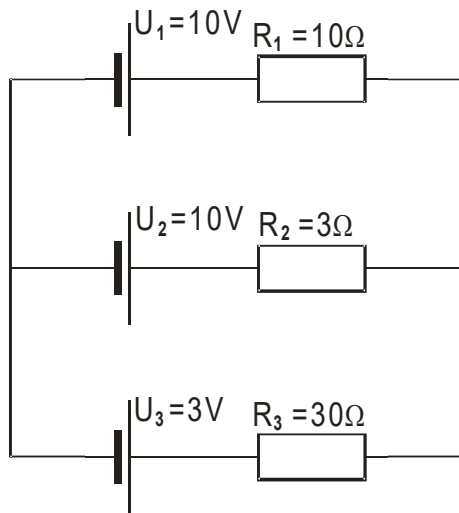
Sestavíme 2. Kirchhoffův zákon s konkrétními hodnotami: $2 \cdot 3 = 6$ nebo $-2 \cdot 3 = -6$.

Dvě možnosti znaménkové konvence:

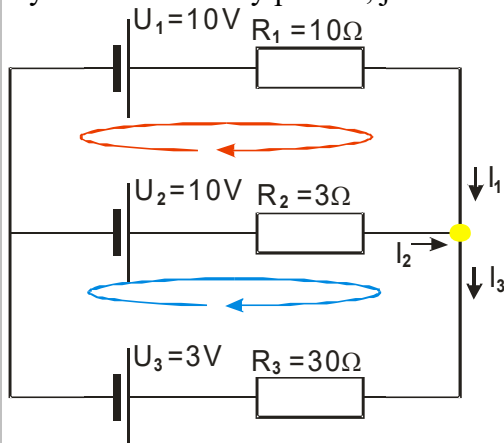
- $2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$ Hodnota úbytku napětí je kladná, když procházíme přes rezistor ve směru proudu a zároveň elektromotorické napětí zdroje je kladné, když narazíme nejdříve na záporný pól zdroje.
- $-2 \cdot 3 = -6 \Rightarrow$ Hodnota úbytku napětí je záporná, když procházíme přes rezistor ve směru proudu a zároveň elektromotorické napětí zdroje je záporné, když narazíme nejdříve na záporný pól zdroje.

Obě možnosti jsou fyzikálně rovnocenné (vedou ke stejným rovnicím), pro lidskou mysl je zřejmě přirozenější první varianta (kladný úbytek napětí při pohybu ve směru proudu), kterou jsme použili v minulé hodině.

Př. 4: Vyřeš pomocí Kirchhoffových zákonů elektrickou síť na obrázku.



Vyznačíme si směry proudů, jeden z uzlů a průchod ve dvou ze tří smyček.



Uzel: $I_1 + I_2 = I_3$.

Červená smyčka: $R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_1 - U_2$.

Modrá smyčka: $R_2 I_2 + R_3 I_3 = U_2 - U_3$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé \Rightarrow pouze matematický problém se soustavou tří rovnic.

Dosadíme hodnoty:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$10 I_1 - 3 I_2 = 10 - 10$$

$$3 I_2 + 30 I_3 = 10 - 3$$

Upravíme soustavu:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$10 I_1 - 3 I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{3 I_2}{10}$$

$$3 I_2 + 30 I_3 = 7$$

Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3 I_2}{10} + I_2 = I_3 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{10 I_3}{13}$$

Dosadíme do poslední rovnice:

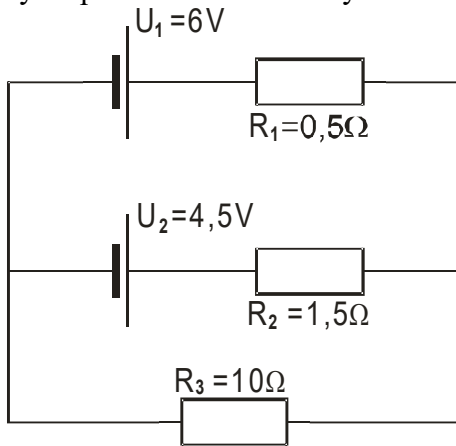
$$3 I_2 + 30 I_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 3 \frac{10 I_3}{13} + 30 I_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{13}{60} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{10 I_3}{13} = \frac{1}{6} \text{ A}$$

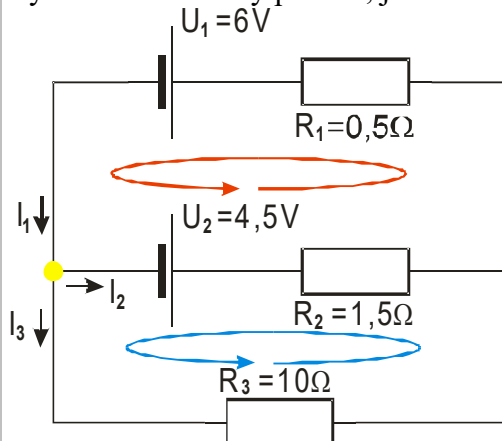
$$I_1 = \frac{3I_2}{10} = \frac{1}{20} \text{ A}$$

Všechny proudy vyšly kladné \Rightarrow směr proudů jsme odhadli dobře a na obrázku nemusíme nic měnit.

Př. 5: Vyřeš pomocí Kirchhoffových zákonů elektrickou síť na obrázku.



Vyznačíme si směry proudů, jeden z uzlů a průchod ve dvou ze tří smyček.



Uzel: $I_1 = I_2 + I_3$.

Červená smyčka: $R_2 I_2 + R_1 I_1 = U_2 - U_1$.

Modrá smyčka: $R_3 I_3 - R_2 I_2 = -U_2$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé \Rightarrow pouze matematický problém se soustavou tří rovnic.

Dosadíme hodnoty.

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$1,5 I_2 + 0,5 I_1 = 4,5 - 6$$

$$10 I_3 - 1,5 I_2 = -4,5$$

Upravíme soustavu.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$0,5 I_1 + 1,5 I_2 = -1,5$$

$$-1,5 I_2 + 10 I_3 = -4,5$$

Vynásobíme dvěma a odstraníme desetinná čísla.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 + 3 I_2 = -3$$

$$-3 I_2 + 20 I_3 = -9$$

Soustavu řešíme například dosazovací metodou.

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$ vyjádříme $I_1 = I_2 + I_3$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$I_1 + 3I_2 = -3 \Rightarrow I_2 + I_3 + 3I_2 = -3 \Rightarrow 4I_2 + I_3 = -3$$

Vyjádříme $I_3 = -3 - 4I_2$ a dosadíme do třetí rovnice:

$$-3I_2 + 20I_3 = -9 \Rightarrow -3I_2 + 20(-3 - 4I_2) = -9 \Rightarrow -51 = 83I_2$$

$$I_2 = -\frac{51}{83} \text{ A}$$

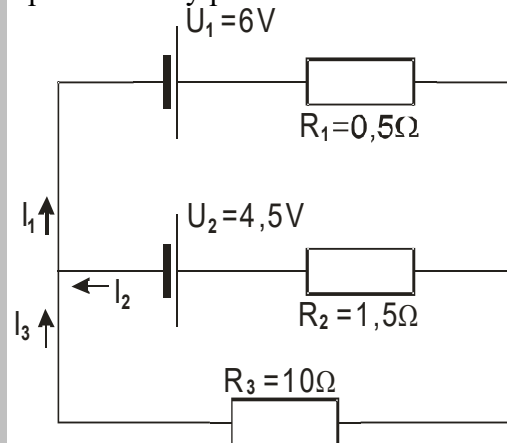
Spočteme zbývající proudy:

$$I_3 = -3 - 4I_2 = -3 - 4\left(-\frac{51}{83}\right) = -\frac{45}{83}$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_1 + \frac{45}{83} + \frac{51}{83} = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{96}{83} \text{ A}$$

Znaménka všech proudů vyšla záporně \Rightarrow směr proudů v obrázku jsme si zvolili špatně.

Správné směry proudů:



Shrnutí: Nic nového jsme se nenaučili. Pravidla z minulé hodiny fungují.