# 4.6.7 Rezonance sériového RLC obvodu

**Předpoklady:** 4606

Výsledky posledního příkladu z minulé hodiny (sériový obvod s rezistorem, ideální cívkou a kondenzátorem).

| frekvence $f$ | celková impedance $Z$ | fázový posun $\varphi$ | proud $I$ |
|---|---|---|---|
| 50 Hz | 60 | $-87°37'$ | 0,083 |
| 100 Hz | 24,4 | $-84°7'$ | 0,21 |
| 200 Hz | 2,64 | $-18°29'$ | 1,89 |
| 300 Hz | 12,3 | $78°14'$ | 0,41 |
| 500 Hz | 31,4 | $54°26'$ | 0,16 |

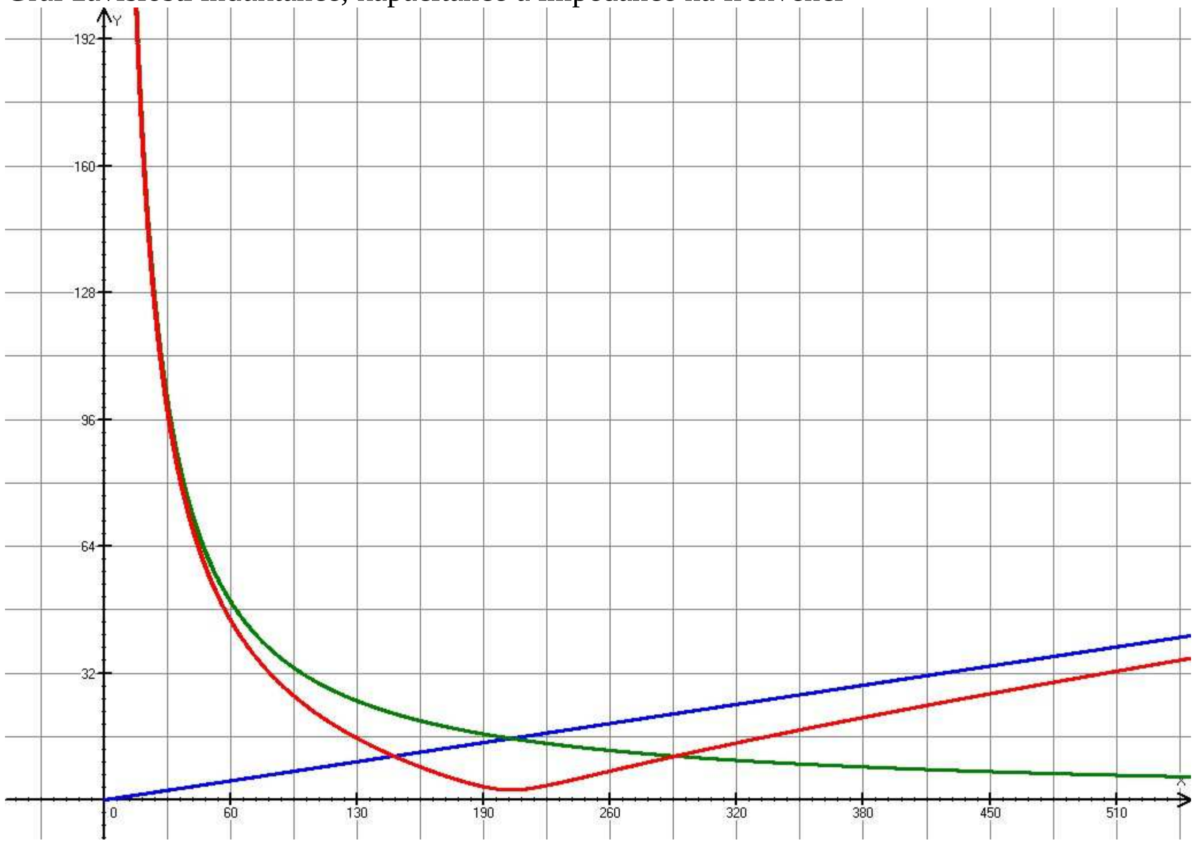
Z tabulky je vidět, že se vzrůstající frekvencí nejdříve impedance klesá a pak zase roste. Záporná hodnota fázového posunu se zmenšuje a pak začne narůstat do kladných hodnot.

Je to logické:

- při frekvenci 50 Hz je větší kapacitance kondenzátoru než induktance cívky, proto se obvod chová jako kondenzátor (záporný fázový posun),
- s rostoucí frekvencí se kapacitance kondenzátoru zmenšuje a induktance cívky roste $\Rightarrow$ při určité frekvenci se vyrovnají (a navzájem vyruší) $\Rightarrow$ impedance obvodu se rovná odporu rezistoru, fázový posun je v tomto okamžiku nulový,
- při dalším zvyšování frekvence induktance dále roste (kapacitance se dále zmenšuje) $\Rightarrow$ obvod se chová jako cívka (kladný fázový posun).

Ještě lépe to bude vidět z grafů:

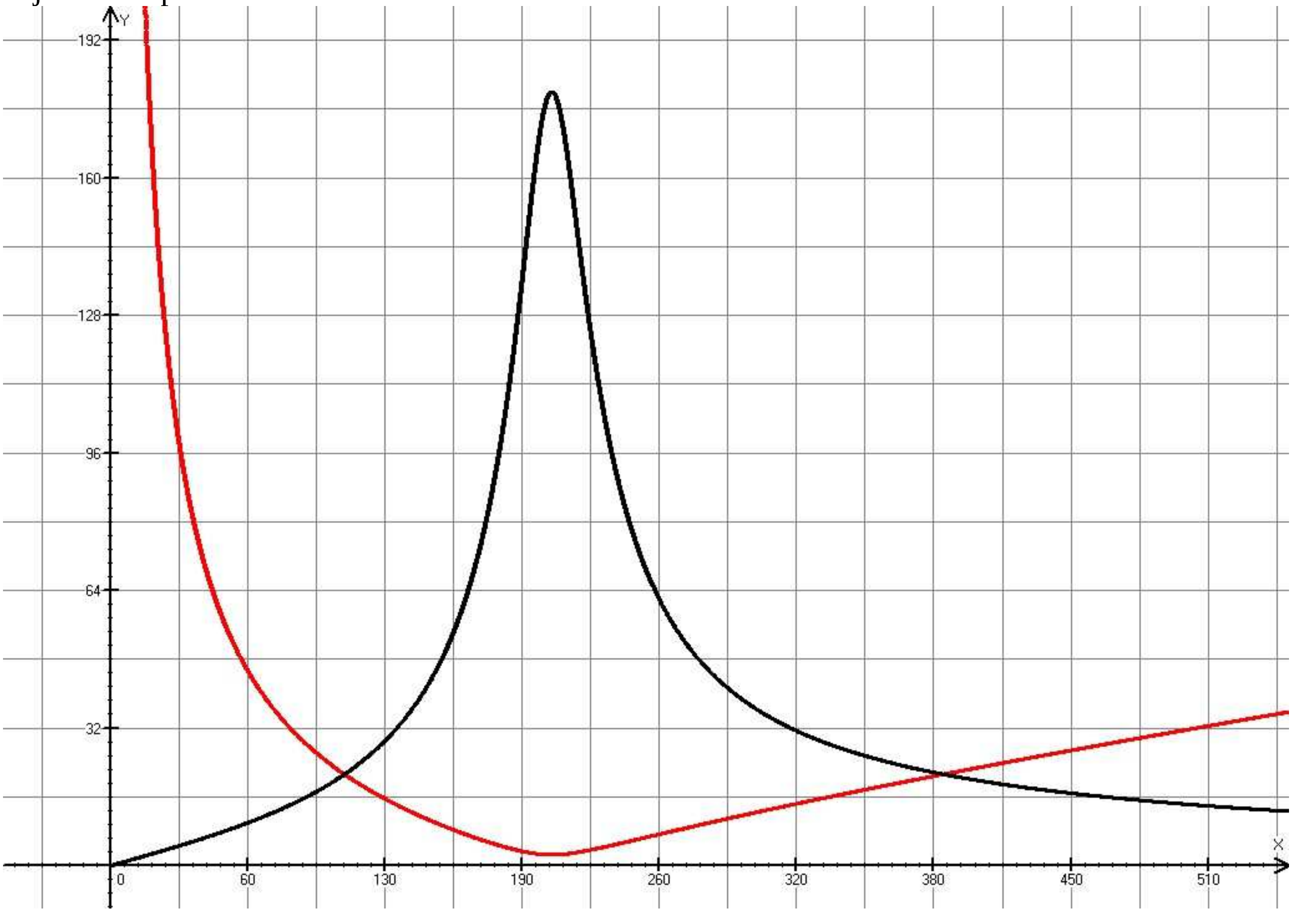
Graf závislosti induktance, kapacitance a impedance na frekvenci



**Př. 1:** Urči barvy, kterými jsou na předchozím grafu zakresleny jednotlivé veličiny (kapacitance, induktance a impedance).

Induktance s frekvencí roste přímo úměrně ⇒ je nakreslena modrou barvou.
Kapacitance s frekvencí klesá nepřímo úměrně ⇒ je nakreslena zeleně.
Impedance nejdříve klesá, pak opět roste ⇒ je nakreslena červeně.

Na hodnotě impedance samozřejmě závisí velikost procházejícího proudu, která je největší při nejmenší impedanci.




Frekvenci, při které je impedance minimální a procházející proud maximální, nazýváme **rezonanční frekvence**.

**Př. 2:** Odvoď vztah pro rezonanční frekvenci sériového RLC obvodu.

K rezonanci dochází, když se kapacitance rovná induktanci (vliv cívky a kondenzátoru se navzájem vyruší).

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Získaný vzorec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ se nazývá **Thomsonův vztah**.

**Dodatek:** V tabulkách bývá někdy uveden i tvar $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

**Př. 3:** Urči rezonanční frekvenci sériového obvodu s rezistorem $2{,}5\,\Omega$ , ideální cívkou $0{,}012\,\mathrm{H}$ a kondenzátorem $50\,\mu F$ . Porovnej výsledek s grafy z úvodu hodiny.

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}012\cdot 50\cdot 10^{-6}}}\,\mathrm{Hz}=205\,\mathrm{Hz}$$

Výsledná frekvence odpovídá údajům ze začátku hodiny (rezonanční frekvence se musí nacházet mezi 100 a 300 Hz, graf impedance má minimum kolem hodnoty 200 Hz).

**Př. 4:** V obvodu je sériově zapojena reálná cívka a kondenzátor $220\,\mu F$ . Urči parametry cívky, pokud při rezonanci protékal obvodem připojeným k napětí 5 V 60 Hz proud 0,45 A.

Reeálná cívka má kromě indukčnosti i odpor.
Rezonanční frekvence je určena kapacitou kondenzátoru a indukčností cívky:

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\sqrt{LC}=\frac{1}{2\pi f_0}$$

$$LC=\frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$$

$$L=\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}=\frac{1}{4\pi^2 60^2\cdot 220\cdot 10^{-6}}\,\mathrm{H}=0{,}032\,\mathrm{H}$$

Při rezonanci omezuje proud v obvodu pouze ohmický odpor: $R=\frac{U}{I}=\frac{5}{0{,}45}\,\Omega=11\,\Omega$ .

Cívka zapojená do obvodu má odpor $11\,\Omega$ a indukčnost $0{,}032\,\mathrm{H}$ .

**Př. 5:** Kolikrát se změní rezonanční frekvence střídavého sériového obvodu, když se kapacita zapojeného kondenzátoru zvětší třikrát a indukčnost cívky se sníží o třetinu?

Původní frekvence obvodu: $f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}}$ .

Nová frekvence: $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

Vyjádříme nové hodnoty pomocí původních:

- třikrát větší kapacita $\Rightarrow$ $C=3C_0$ ,
- indukčnost o třetinu nižší $\Rightarrow$ $L=L_0-\frac{1}{3}L_0=\frac{2}{3}L_0$ .

Dosadíme do vztahu pro frekvenci:

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}L_0 3C_0}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{2L_0C_0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}f_0=\frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Pro novou frekvenci platí vztah $f=\frac{f_0}{\sqrt{2}}$ .

**Př. 6:** Urči kapacitu kondenzátoru, který je třeba zapojit sériově se žárovkou 6,3 V / 100 mA, aby po připojení k síťovému napětí 230 V 50 Hz žárovka svítila na svých jmenovitých hodnotách.

Připojením kondenzátoru vznikne sériový střídavý obvod ⇒ potřebujeme znát odpor svítící žárovky, který určíme ze jmenovitých hodnot.

$$R=\frac{U}{I}=\frac{6{,}3}{0{,}1}\,\Omega=63\,\Omega$$

Po připojení obvodu k síťovému napětí má obvodem procházet proud 100 mA ⇒ celková impedance: $Z=\frac{U}{I}=\frac{230}{0{,}1}\,\Omega=2300\,\Omega$ .

Ze vztahu pro celkovou impedanci určíme kapacitanci a z kapacitance kapacitu kondenzátoru.

$$Z=\sqrt{R^2+X_C^2} \quad \Rightarrow \quad X_C=\sqrt{Z^2-R^2}$$

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\,C}=\sqrt{Z^2-R^2}$$

$$C=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\sqrt{Z^2-R^2}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot 50\sqrt{2300^2-63^2}}\,\mathrm{F}=1{,}38\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}=1{,}38\,\mu\mathrm{F}$$

K žárovce musíme sériově připojit kondenzátor o kapacitě $1{,}38\,\mu\mathrm{F}$ .

**Př. 7:** Urči frekvenci, při které bude v sériovém sériového obvodu s reálnou cívkou $2{,}5\,\Omega$ , $0{,}012\,\mathrm{H}$ a kondenzátorem $50\,\mu F$ fázový rozdíl mezi napětím a proudem 45° (napětí předbíhá proud). Výsledek dopředu odhadni na základě příkladů z minulé hodiny.

Napětí předbíhá proud ⇒ induktance je větší než kapacitance.

$$\varphi=45^\circ \quad \Rightarrow \quad tg\,\varphi=1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}=1$$

Hledaná frekvence musí být vyšší než rezonanční frekvence 205 Hz a menší než frekvence 300 Hz (při této frekvenci je fázový posun více než 78°).

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=R$$

$$\omega^2 LC-1=R\omega C$$

$\omega^2 LC-R\omega C-1=0$ kvadratická rovnice ⇒ dosadíme a vypočteme pomocí vzorce.

$$\omega^2 0{,}012\cdot 50\cdot 10^{-6}-2{,}5\cdot 50\cdot 10^{-6}\omega-1=0 \quad / \quad 10^6$$

$$0{,}6\,\omega^2-125\cdot\omega-10^6=0$$

$\omega_1=-1191\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ (zjevně nereálné), $\omega_2=1399\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

$$\omega=2\cdot\pi\,f$$

$$f=\frac{\omega}{2\cdot\pi}=\frac{1399}{2\cdot\pi}\,\mathrm{Hz}=223\,\mathrm{Hz}$$

Fázový rozdíl 45° mezi napětím a proudem se ve zkoumaném obvodu objeví při frekvenci 223 Hz.

**Shrnutí:** Kapacitance kondenzátoru s frekvencí klesá, induktance cívky s frekvencí roste ⇒ při určité frekvenci je celková impedance sériového RLC obvodu minimální – nastává rezonance, obvodem prochází maximální proud s nulovým fázovým posunem vůči napětí zdroje.