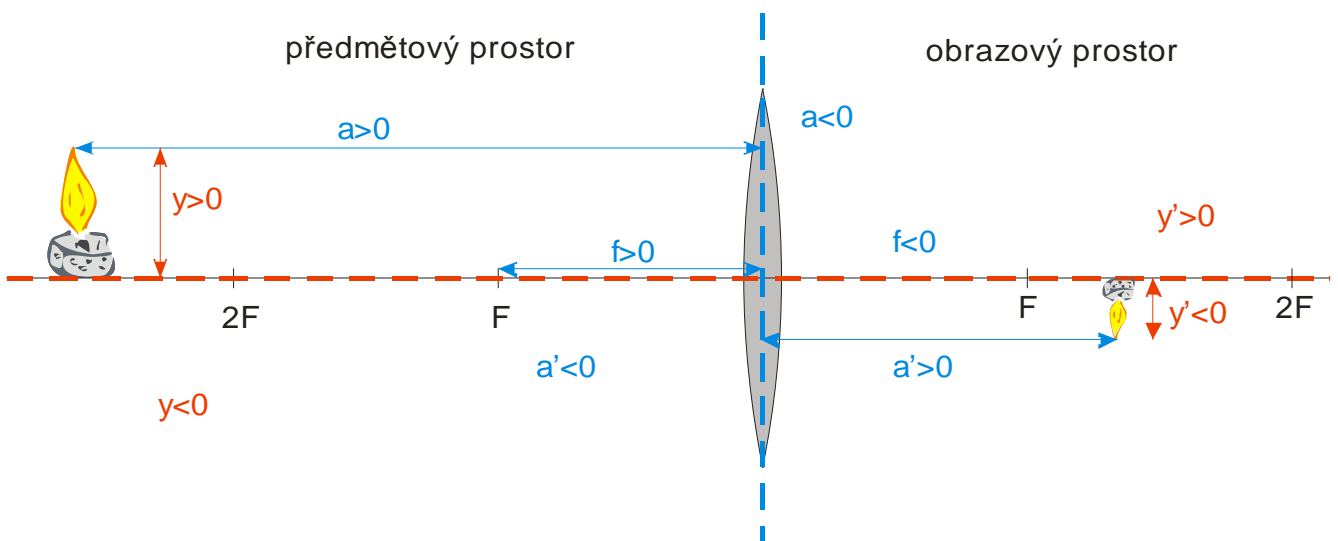


## 5.2.7 Zobrazení spojkou I

**Předpoklady:** 5203, 5206

**Pedagogická poznámka:** Obsah hodiny neodpovídá vyučovací hodině. Kvůli dalším hodinám je třeba dojít alespoň k příkladu 8. V případě, že žákům dáte stavebnice a necháte je výsledky ověřovat, zabere látka dvě vyučovací hodiny. Když mám málo času probereme pouze první část hodiny na konci hodiny 050209 (rozptylka) spočítáme ještě příklad 12 (aby si žáci vyzkoušeli, jak postupovat, když se zobrazuje přes více čoček).

**Př. 1:** Prostuduj na obrázku znaménkovou konvenci pro čočky a srovnej ji se znaménkovou konvencí pro zrcadla. Jaké jsou rozdíly, čím jsou zřejmě způsobeny?

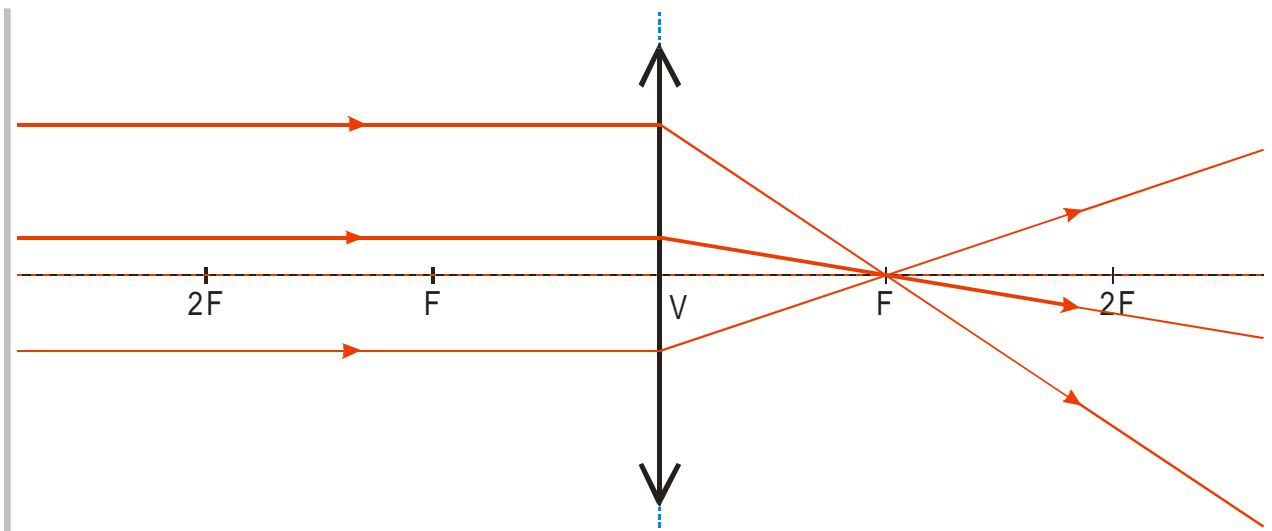


Rozdíly proti zrcadlům:

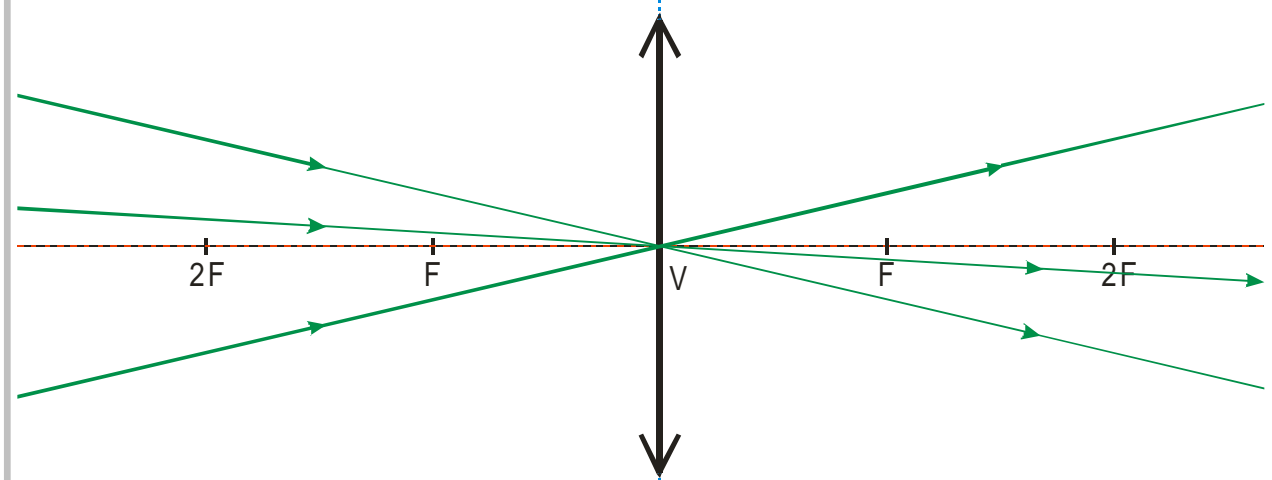
- kladný obrazový prostor je u čoček za nimi u zrcadel před nimi (čočky paprsky neodráží jako zrcadla, ale propouštějí paprsky za sebe),
- místo písmenka  $S$  je ve dvojnásobku ohniskové vzdálenosti označení  $2F$  (není důvod značit vzdálenost jako střed).

Stejně jako u zrcadel budeme i u čoček používat k hledání obrazů význačné paprsky.

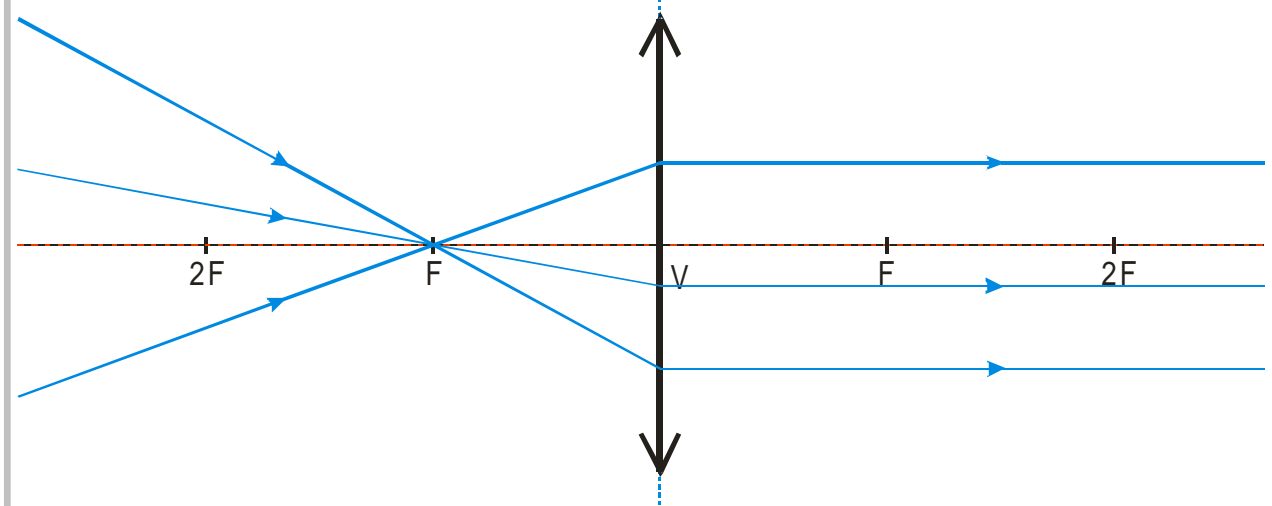
**Př. 2:** Nakresli průchod význačných paprsků spojkou.



Paprsky rovnoběžné s osou se lámou do ohniska.

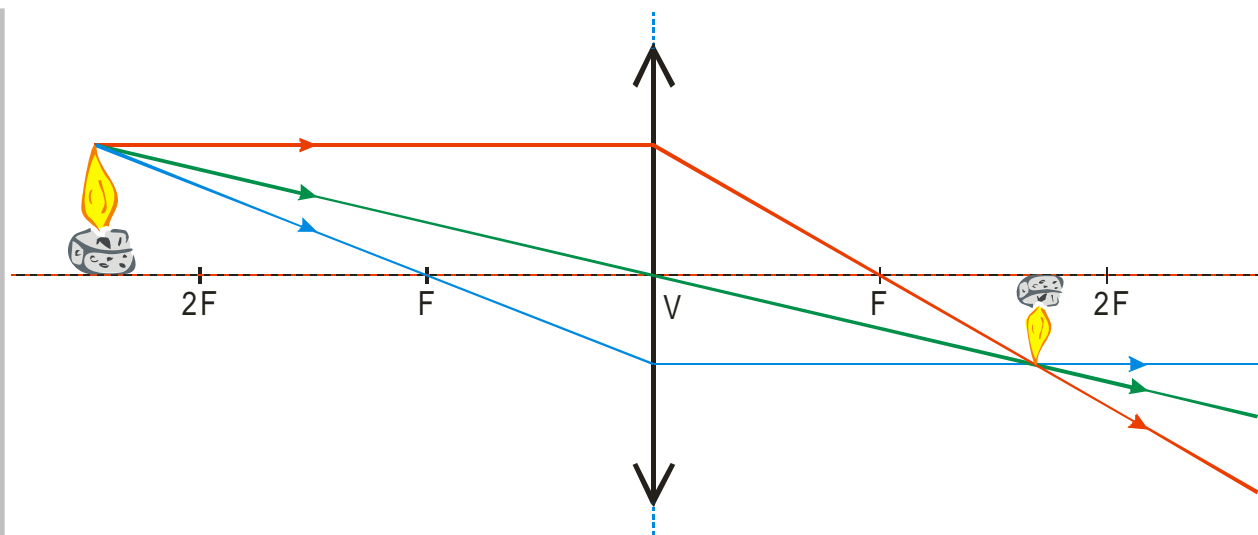


Směr paprsku procházejícího vrcholem se nemění.



Paprsky procházející ohniskem se zalomí tak, aby byly rovnoběžné.

**Př. 3:** Pomocí význačných paprsků najdi obraz svíčky, která je od čočky vzdálena více než dvě ohniskové vzdálenosti.



Z obrázku je vidět, že vznikne reálný, převrácený a zmenšený obraz svíčky.

**Př. 4:** Svíčka je od spojky 13,3 D vzdálena 30 cm. Urči v jaké vzdálenosti od čočky najdeme její skutečný obraz. Kolikrát bude obraz svíčky zmenšený? Ověř pokusem.

$$\varphi = 13,3 \text{ D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm} \quad , \quad a = 30 \text{ cm} \quad , \quad a' = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

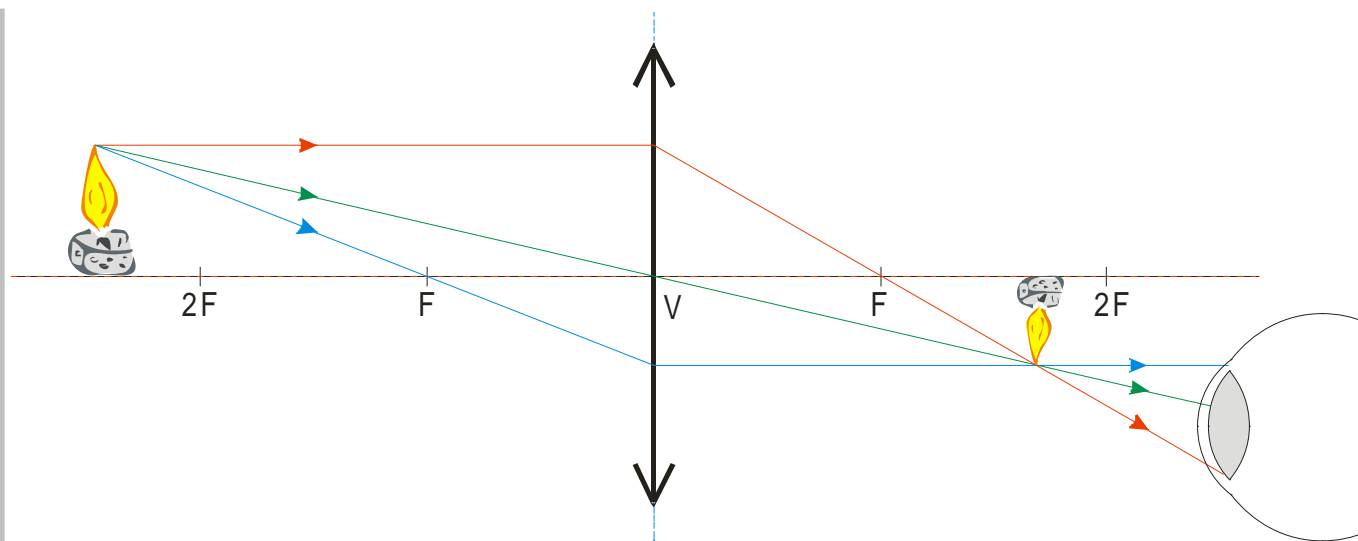
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$$

$$a' = \frac{f \cdot a}{a - f} = \frac{7,5 \cdot 30}{30 - 7,5} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{10}{30} = -0,33$$

Obraz svíčky najdeme ve vzdálenosti 10 cm. Obraz bude převrácený a zmenšený na 0,33 násobek originálu (tedy 3 krát zmenšený).

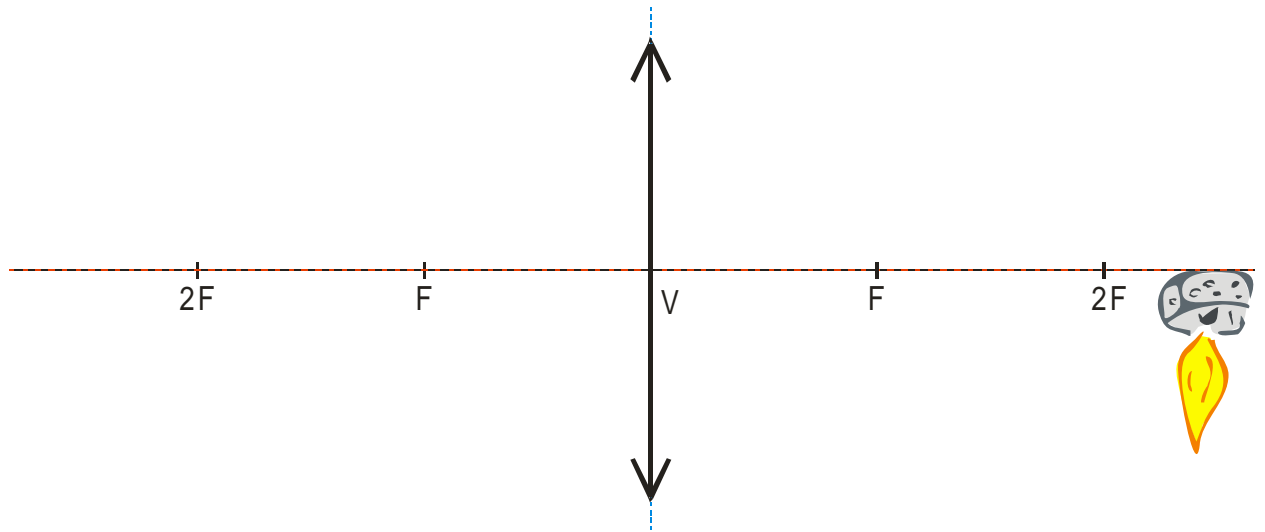
**Př. 5:** Svíčka je od spojky 13,3 D vzdálena 30 cm (viz, předchozí příklad). Co uvidíš, když se na plamínek přes spojku podíváš? Ověř pokusem.



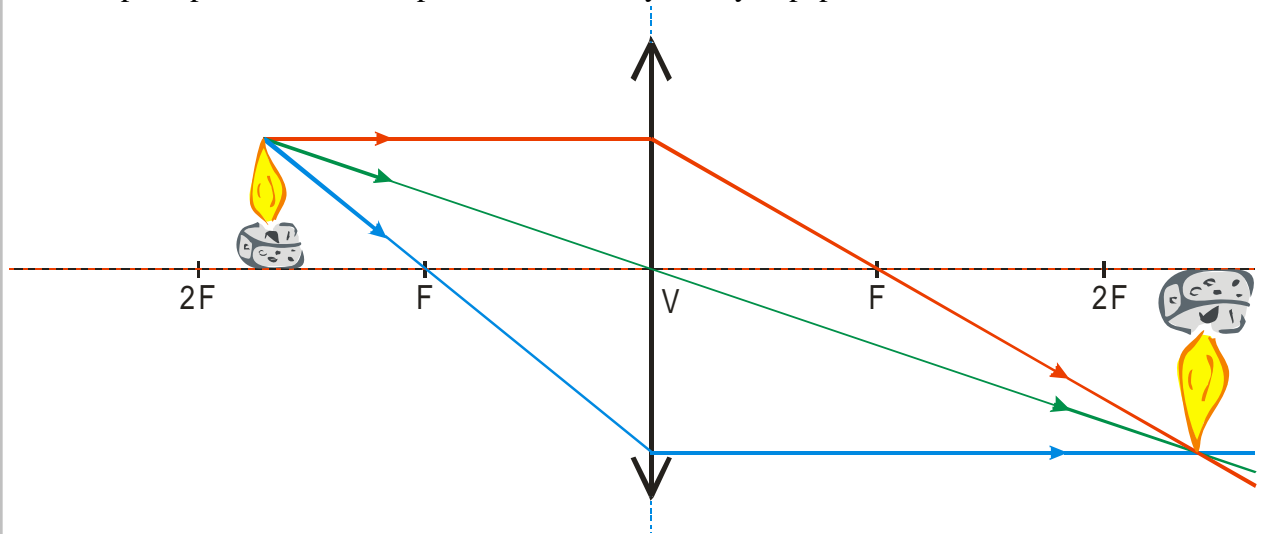
Paprsky, které dopadají do oka vylétají z obrazu svíčky  $\Rightarrow$  v čočce uvidíme převrácenou zmenšenou svíčku.

**Pedagogická poznámka:** Myslím, že předchozí příklad (i jeho praktické ozkoušení) je důležitý pro další látku. Je na něm názorně vidět, že oči doopravdy nevidí předmět, ale pouze jeho obraz. Na tomto principu fungují optické přístroje. Někteří studenti si to teprve v tomto okamžiku začnou uvědomovat.

**Př. 6:** Ve vzdálenosti větší než je dvojnásobek ohniskové vzdálenosti vznikl převrácený, zvětšený a reálný obraz svíčky. V jaké vzdálenosti před čočkou musí být postavena svíčka?



Budeme postupovat obráceně, opět nakreslením význačných paprsků.



Svíčka musí být postavena ve vzdálenosti větší než je vzdálenost ohnisková a menší než je dvojnásobek ohniskové vzdálenosti.

V obou předchozích příkladech se spojka chová podobně jako duté zrcadlo.

**Př. 7:** Do jaké vzdálenosti před spojkou 13,3 D musíš umístit svíčku, aby si zachytil její zvětšený obraz na papír ve vzdálenosti 25 cm od čočky. Ověř pokusem.

$$\phi = 13,3 \text{ D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm} \quad , \quad a' = 25 \text{ cm} \quad , \quad a = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{a}$$

$$a = \frac{f \cdot a'}{a' - f} = \frac{7,5 \cdot 25}{25 - 7,5} \text{ cm} = 10,7 \text{ cm}$$

Svíčku musíme umístit 10,7 cm před čočku, aby na papíru ve vzdálenosti 25 cm od čočky vznikl reálný, zvětšený, převrácený obraz svíčky.

**Př. 8:** Mezi svíčkou a papírem je vzdálenost 50 cm. Umístí mezi svíčku a papír spojku 13,3 D tak, aby na papíru vznikl obraz svíčky. Kolik je možností? Bude obraz zvětšený nebo zmenšený? Ověř pokusem.

Známe vzdálenost mezi předmětem a obrazem  $\Rightarrow$  víme, že platí  $a + a' = d = 50 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 13,3 \text{ D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$ ,  $a = ?$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d-a}$$

$$(d-a) \cdot a = f \cdot (d-a) + f \cdot a$$

$$d \cdot a - a^2 = f \cdot d - f \cdot a + f \cdot a$$

$$d \cdot a - a^2 = f \cdot d$$

$a^2 - d \cdot a + f \cdot d = 0 \Rightarrow$  získali jsme kvadratickou rovnici  $\Rightarrow$  dosadíme a vypočteme vzorcem.

$$a^2 - 50a + 7,5 \cdot 50 = 0$$

Získali jsme dva kořeny:

- $a_1 = 40,8 \text{ cm}$  svíčka daleko od čočky  $\Rightarrow$  na papíře vznikne zmenšený, převrácený, reálný obraz.
- $a_2 = 9,2 \text{ cm}$  svíčka blízko u čočky  $\Rightarrow$  na papíře vznikne zvětšený, převrácený, reálný obraz.

Čočku můžeme umístit buď 40,8 cm nebo 9,2 cm od svíčky.

**Pedagogická poznámka:** Všechny pokusy studenti opravdu provádějí v lavicích se zmiňovanou spojkou 13,3 D a myslím, že je to vcelku baví, ale hlavně se vlastnoručně mohou přesvědčit, že nepočítají nějaké nefungující nesmysly. Asi největším problémem se ukázalo, že někteří z nich mají malé zkušenosti se zednickým metrem, který dostali na odměřování vzdáleností, a museli si s ním hrát. Mám pocit, že se nám nakonec podařilo najít únosný kompromis a studenti kromě hraní si s čočkou i počítali a dávali pozor, když jsme si výsledky kontrolovali.

**Př. 9:** Spojka 13,3 D vytvořila skutečný, převrácený, třikrát zvětšený obraz svíčky. Urči rozestavení pokusu (předmětovou a obrazovou vzdálenost). Výsledek ověř pokusem.

$\varphi = 13,3 \text{ D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$ ,  $Z = -3$  (obraz je převrácený),  $a' = ?$ ,  $a = ?$

Zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$  nestačí, obsahuje dvě neznámé  $\Rightarrow$  použijeme vztah pro

zvětšení  $Z = \frac{-a'}{a} \Rightarrow -aZ = a'$ .

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{-aZ}$$

$$a = f - \frac{f}{Z} = \frac{Zf - f}{Z} = f \frac{Z-1}{Z} = 7,5 \frac{-3-1}{-3} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$a' = -aZ = -10 \cdot (-3) \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

Svíčka je spojkou vzdálena 10 cm, její obraz vzniká ve vzdálenosti 30 cm od čočky.

**Př. 10:** Tenčí spojka má ohniskovou vzdálenost  $f = 26,2 \text{ cm}$ . Je možné vytvořit touto čočkou na optické lavici o délce 1 m obraz svíčky?

Obraz na optické lavici půjde vytvořit pokud můžeme u této spojky dosáhnout toho, aby součet předmětové a obrazové vzdálenosti byl menší nebo roven délce lavice  $\Rightarrow$  předpokládáme poslední vyhovující možnost  $a + a' = d = 100 \text{ cm}$   $\Rightarrow$  stejně jako předcházející příklad.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d-a}$$

$$(d-a) \cdot a = f \cdot (d-a) + f \cdot a$$

$$d \cdot a - a^2 = f \cdot d - f \cdot a + f \cdot a$$

$$d \cdot a - a^2 = f \cdot d$$

$a^2 - d \cdot a + f \cdot d = 0$   $\Rightarrow$  získali jsme kvadratickou rovnici  $\Rightarrow$  dosadíme a vypočteme vzorcem.

$$a^2 - 100a + 26,2 \cdot 100 = 0$$

Diskriminant rovnice je záporný  $\Rightarrow$  rovnice nemá žádné řešení  $\Rightarrow$  optická lavice je příliš krátká na to, abychom na ní mohli spojkou o ohniskové vzdálenosti 26,2 cm vytvořit skutečný obraz.

**Př. 11:** Změř pomocí optické lavice délku třídy (není možné měřit třídu postupným pokládáním metru). Rozvaž, jakou spojkou použít.

Postavíme svíčku na začátek lavice a přiložíme tento konec k jedné ze zdí. Pohybujeme čočkou tak, aby se na protější stěně vytvořil její skutečný obraz.

Použijeme spojkou s větší ohniskovou vzdáleností, zostření obrazu ve velké vzdálenosti je u ní snazší.

Délku třídy můžeme určit dvěma způsoby.

Změříme vzdálenost mezi čočkou a svíčkou a pomocí zobrazovací rovnice dopočítáme obrazovou vzdálenost, která po sečtení s předmětovou vzdáleností dá délku třídy.

$$f = 26,2 \text{ cm}, \quad a = 27,2 \text{ cm}, \quad a' = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$$

$$a' = \frac{f \cdot a}{a - f} = \frac{26,2 \cdot 27,2}{27,2 - 26,2} \text{ cm} = 713 \text{ cm} = 7,1 \text{ m}$$

Třída je dlouhá 7,4 m.

Změříme velikost obrazu svíčky, skutečnou velikost svíčky a předmětovou vzdálenost svíčky. Dosazením do vztahu pro příčné zvětšení můžeme určit obrazovou vzdálenost a z ní pak délku třídy.

$$a = 27,2 \text{ cm}, \quad y = 2,1 \text{ cm}, \quad y' = -56,5 \text{ cm} \text{ (obraz je převrácený)}, \quad a' = ?$$

$$Z = -\frac{a'}{a} = \frac{y'}{y} \Rightarrow a' = -\frac{y'}{y} \cdot a = -\frac{-56,5}{2,1} \cdot 27,2 = 731 \text{ cm} = 7,3 \text{ m}$$

Délka třídy je 7,6 m.

Která z metod je přesnější?

Zřejmě metoda druhá, protože při zaostřování na zeď kvalita obrazu citlivě reaguje na změnu

vzdálenosti mezi čočkou a svíčkou. Navíc určená vzdálenost je poměrně blízká hodnotě ohniskové vzdálenosti čočky, což ústí do poměrně malé hodnoty jmenovatele zlomku, která silně ovlivňuje velikost výsledku.

**Dodatek:** Délka třídy změřená pásmem je 8,3 m.

**Př. 12:** Na počátku optické lavice je umístěna svíčka. 50 cm od svíčky je umístěna spojka o ohniskové vzdálenosti 26,2 cm o dalších 5 cm dále pak spojka o ohniskové vzdálenosti 7,6 cm. Je možné na lavici zachytit skutečný obraz svíčky? Výsledek odhadni, pak rozhodni početně a nakonec ověř pokusem.

Jakým způsobem se budou šířit paprsky?

První spojka je zalomí tak, že by vytvořily obraz za optickou lavicí, druhá spojka je zalomí ještě jednou  $\Rightarrow$  na lavici by měl vzniknout blízko za druhou čočkou obraz (v ještě menší vzdálenosti než je ohnisková vzdálenost druhé čočky, paprsky jsou už sbíhavé po zalomení první čočkou).

Početně: Obraz první čočky je předmětem druhé čočky  $\Rightarrow$  dvakrát použijeme zobrazovací rovnici.

$$f = 26,2 \text{ cm} \quad , \quad a = 30 \text{ cm} \quad , \quad a' = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$$

$$a' = \frac{f \cdot a}{a - f} = \frac{26,2 \cdot 30}{30 - 26,2} \text{ cm} = 55 \text{ cm}$$

Obraz svíčky vytvořený první spojkou je předmětem druhé spojky.

$f = 7,6 \text{ cm}$  ,  $a = -50 \text{ cm}$  (druhá spojka je o 5 cm dále než první spojka  $\Rightarrow$  první čočka vytvoří svůj obraz 50 cm za druhou čočkou  $\Rightarrow$  za čočkou znamená záporné znaménko ),  
 $a' = ?$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$$

$$a' = \frac{f \cdot a}{a - f} = \frac{7,6 \cdot (-50)}{-50 - 7,6} \text{ cm} = 6,6 \text{ cm}$$

Experiment: Obraz vznikl 6 cm za druhou čočkou.

**Př. 13:** Navrhni takové rozmístění dvou spojek o ohniskové vzdálenosti 7,6 cm, které by vytvořilo skutečný dvakrát zvětšený nepřevrácený obraz svíčky umístěné na počátku optické lavice. Ověř odhad početně i experimentálně.

Při zobrazení jednou spojkou vznikne převrácený skutečný obraz  $\Rightarrow$  tento obraz znovu zobrazíme druhou spojkou, tím se opět převrátí a tento druhý obraz bude mít stejnou orientaci jako původní svíčka.

Možností realizace je více. Například první spojkou vytvoříme převrácený obraz stejné velikosti jakou má svíčka a druhou spojkou tento obraz opět převrátíme a dvakrát zvětšíme.

**Vytvoření převráceného, nezvětšeného obrazu**

$$\varphi = 13,3 \text{ D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm} \quad , \quad Z = -1 \quad (\text{obraz je převrácený}), \quad a' = ? \quad , \quad a = ?$$

Zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$  nestačí, obsahuje dvě neznámé  $\Rightarrow$  použijeme vztah pro

zvětšení  $Z = \frac{-a'}{a} \Rightarrow -aZ = a'$  .

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{-Za}$$

$$a = f - \frac{f}{Z} = \frac{Zf - f}{Z} = f \frac{Z - 1}{Z} = 7,5 \frac{-1 - 1}{-1} \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$a' = -aZ = -15 \cdot (-1) \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

**Vytvoření převráceného dvakrát zvětšeného obrazu**

$\varphi = 13,3\text{D} \Rightarrow f = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$  ,  $Z = -2$  (obraz je převrácený),  $a' = ?$  ,  $a = ?$

Použijeme odvozené vztahy.

$$a = f - \frac{f}{Z} = \frac{Zf - f}{Z} = f \frac{Z - 1}{Z} = 7,5 \frac{-2 - 1}{-2} \text{ cm} = 11,25 \text{ cm}$$

$$a' = -aZ = -11,25 \cdot (-2) \text{ cm} = 22,5 \text{ cm}$$

Pokus musíme sestavit například takto: začátek lavice o cm svíčka, 15 cm první spojka,  $15 + 15 + 11,25 = 41,25$  cm druhá spojka,  $15 + 15 + 11,25 + 22,5 = 63,75$  cm obraz (stínítko).

**Shrnutí:** Chování spojky je velmi podobné chování dutého zrcadla.