6.1.4 Kontrakce délek

Předpoklady: 6103

Existuje na Zemi jev, na kterém je dilatace času opravdu vidět?

Př. 1: Částice mion má poločas rozpadu (doba, za kterou se rozpadne přibližně polovina částic) $2{,}2\,\mu s$. Vysvětli, jak je možné, že tyto částice doletí k povrchu Země, i když vznikají v horních vrstvách atmosféry ve výšce $15\,km$ a pohybují se směrem k Zemí rychlostí $v=0{,}999\,c$.

Jakou dráhu částice uletí podle klasické fyziky?
$s=vt=0{,}999\cdot 300\,000\,000\cdot 0{,}000\,002\,2\,m=660\,m$
Jak dlouho by mion musel žít, aby doletěl k zemi?
$$t=\frac{s}{v}=\frac{15000}{0{,}999\cdot 300000000}s=5\cdot 10^{-5}s$$
Kolikrát je potřebný čas delší než poločas rozpadu?
$$n=\frac{5\cdot 10^{-5}}{2{,}2\cdot 10^{-6}}=22{,}7=23$$
Skoro všechny částice by se rozpadly před tím než by doletěly k povrchu Země, zbylo by jich jen $0{,}5^{23}=1{,}2\cdot 10^{-7}$ původního počtu.
Nápad: Mion letí velmi velkou rychlostí $\Rightarrow$ jeho hodiny jdou o dost pomaleji. Na kolik se prodlouží jeho poločas rozpadu (z našeho pohledu)?
$$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2{,}2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{0{,}999\,c^2}{c^2}}}s=4{,}9\cdot 10^{-5}s$$
- jen o trochu kratší doba než je potřeba k cestě na povrch Země $\Rightarrow$ téměř polovina mionů doletí.

Př. 2: Najdi nedostatek v předchozím vysvětlení experimentálního faktu dopadu mionů na povrch Země.

Předchozí příklad vysvětluje, jak mohou miony doletět k povrchu Země z hlediska vnějšího pozorovatele (Země). Vnější pozorovatel vidí miony letět velkou rychlostí $\Rightarrow$ vidí, že pro miony plyne pomaleji a ony mají dostatek času, aby doletěly k povrchu Země.
Předchozí vysvětlení neplatí z hlediska mionů. Miony se samy vůči sobě nepohybují (naopak zdá se jim, že se k nim strašlivou rychlostí blíží povrch Země) $\Rightarrow$ jejich čas plyne normálně $\Rightarrow$ nemají dost času, aby doletěly k povrchu Země.

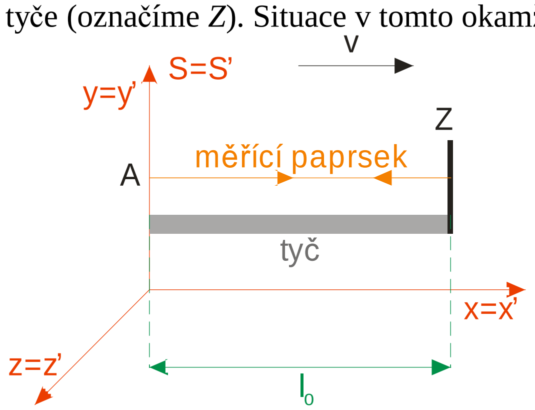
$\Rightarrow$ Na vysvětlení faktu, že miony doletí k povrchu Země z jejich pohledu naše dosavadní vědomosti nestačí $\Rightarrow$ musí existovat další relativistický efekt, který ještě neznáme a který:
- buď nějakým způsobem prodlouží život mionů i z jejich pohledu,
- nebo nějakým způsobem zkrátí dráhu, kterou musí miony uletět.

Kontrakce délek
- Relativistické zkrácení délek ve směru pohybu předmětu vůči pozorovateli = mion vidí vzdálenost od okraje atmosféry k povrchu Země kratší, protože se vůči této vzdálenosti pohybuje.

- Pozorovatel na Zemi tuto vzdálenosti vidí normální, protože vůči ní stojí.
- Vzorec: $l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ l_0 - vzdálenost, kterou naměří pozorovatel, který se vůči vzdálenosti nepohybuje (ze všech nejdelší), l - vzdálenost, kterou naměří pozorovatel, který se vůči ní pohybuje (vždy menší než l_0).
- Vzdálenosti kolmé na směr pohybu se nezkracují.

Dodatek: Odvození vzorců provádím většinou pouze pro zájemce.

Problém: Délka tyče je vzdálenost koncových bodů, jejichž polohu změříme současně vzhledem k soustavě, ve které měříme délku tyče (kvůli relativitě současnosti nemůžeme změřit konce tyče současně pro všechny pozorovatele. Pokud tyč má nějakou délku délku, nejsou změření obou konců soumístné a tedy ani současné události).
Délku tyče změříme pomocí světelného paprsku, který vyšleme z jednoho konce k tyče k druhému, kde se odrazí od zrcadla a vrátí se zpět. Změříme dobu, kterou paprsek stráví na cestě a z ní spočteme délku tyče.
Tyč o délce l_0 je umístěna v soustavě *S'*, která se vůči soustavě *S* pohybuje rychlostí *v*.
V čase $t = t' = 0\,\mathrm{s}$ splývají počátky soustav souřadnic *S* a *S'* a v tomto počátku se nachází jeden konec tyče (označíme *A*), v tomto okamžiku vyšleme světlo k zrcadlu umístěném na druhém konci tyče (označíme *Z*). Situace v tomto okamžiku je na obrázku.



Sledujeme, jak dlouho paprsek leží tam a zpět.
Let paprsku po trase *AZA* trvá:

- v soustavě *S'* dobu: $\Delta t_0 = \frac{2 l_0}{c}$,
- v soustavě *S* dobu: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (ze soustavy *S* vidíme děje v soustavě probíhat pomaleji kvůli dilataci času).

Hledáme jiné vyjádření času Δt v soustavě *S* pomocí délky tyče *l*.

- Dráha, kterou urazí světlo v soustavě *S* na trase *AZ* (konec tyče před ním utíká):
  $c t_1 = l + v t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{l}{c - v}$.
- Dráha, kterou urazí světlo v soustavě *S* na trase *ZA* (konec tyče mu jde vstříc):
  $c t_2 = l - v t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{l}{c + v}$.

Celková doba letu světla v soustavě *S*: $\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = l \cdot \left(\frac{c + v + (c - v)}{c^2 - v^2} \right) = l \frac{2c}{c^2 - v^2}$.

Pokračujeme v úpravách: $\Delta t = l \frac{2c}{c^2 - v^2} = l \frac{2c}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Vztahy $\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$ a $\Delta t = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ dosadíme do vztahu pro dilataci času $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

čímž z rovnosti odstraníme časy $\frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

$$\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l_0$$

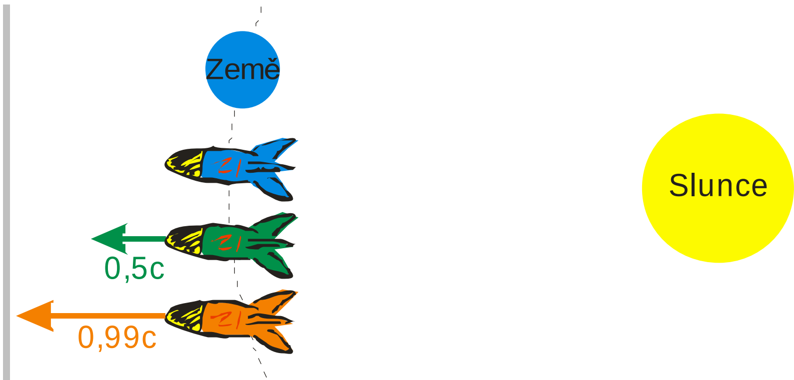
$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Př. 3: Urči, jak se díky kontrakci délek z pohledu mionů zkrátí dráha, kterou musí uletět. Miony vznikají ve výšce 15 km a letí k povrchu Země rychlostí $v = 0{,}999\,c$.

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 15000 \cdot \sqrt{1-\frac{(0{,}999\,c)^2}{c^2}}\ \text{m} = 670\ \text{m}$$

Mion vidí, že musí urazit k povrchu Země vzdálenost 670 m (má tedy téměř poloviční pravděpodobnost, že k ní doletí).

Př. 4: Na oběžné dráze se potkají tři stejné rakety. Modrá vůči Zemi stojí, zelená se vůči Zemi pohybuje rychlostí 0,5c (ve směru kolmo od Slunce) a oranžová se ve stejném směru pohybuje rychlostí 0,99c. Která z lodí je nejkratší? Co uvidí piloti jednotlivých raket?



Délka lodě závisí na soustavě, ze které ji měříme $\Rightarrow$ není možné tvrdit, že některá z raket je kratší.

Pohled pilota modré rakety:

- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- zelená raketa je trochu kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,5 c),
- oranžová raketa je o hodně kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c).

Pohled pilota zelené rakety:

- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- modrá raketa je kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,5 c),
- oranžová raketa je kratší než moje a nepatrně delší než modrá (pohybuje se vůči mě

rychlostí 0,49 c).

Pohled pilota oranžové rakety:

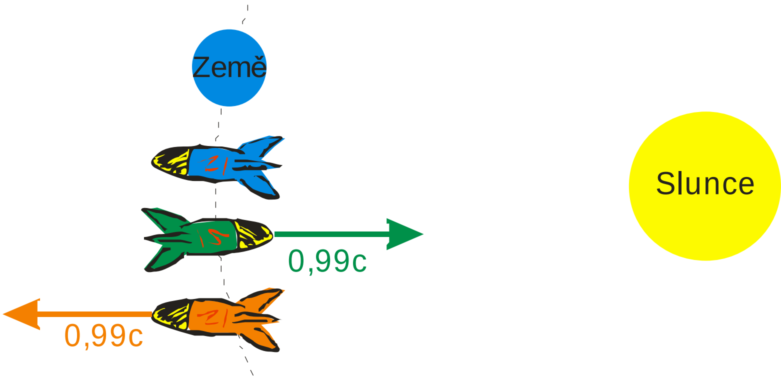
- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- zelená raketa je trochu kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,49 c),
- modrá raketa je o hodně kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c).

Zdůrazněme ještě jednou:
Kontrakce délek neznamená, že se letící raketa zkrátí, protože délka letící rakety liší v závislosti na rychlosti pozorovatele vůči raketě. Kosmonaut, který uvnitř rakety sedí, ji vidí nezkrácenou (nepohybuje se vůči ní). Není tedy třeba, aby na raketu působila nějaká síla, která by ji stlačila, protože k žádnému absolutnímu zkrácení rakety nedochází. Dochází pouze k tomu, že pozorovatelé, kteří se vůči raketě velmi rychle pohybují, vnímají díky své rychlosti jednu z dimenzí prostoru zkráceně a kvůli tomu se jim zkráceně jeví i raketa.

STR předpovídá oproti klasické mechanice i některé „absolutní“ rozdíly. STR například pro miony v úvodním příkladu vysvětluje, proč dopadnou na Zemi (klasická fyzika fakt, že dopadnou na Zemi v pozorovaných počtech, vysvětlit neumí). Neděje se tak kvůli tomu, že by docházelo ke změnám v souřadných soustavách pozorovatelů (mion se nevidí stárnout pomaleji, Země se nevidí zkráceně), ale kvůli tomu, že dochází ke změnám v souřadných soustavách, které se vůči pozorovateli pohybují (Země vidí letící mion stárnout pomaleji, mion vidí přibližující se Zemi zkrácenou).

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka je důležitá a je třeba ji zmínit i v případě, že se žákům předchozí příklad podaří vyřešit a nikdo se řešení nebrání.

Př. 5: Na oběžné dráze se potkají tři stejné rakety. Modrá vůči Zemi stojí, zelená se vůči Zemi pohybuje rychlostí 0,99c (ve směru kolmo ke Slunci) a oranžová se vůči Zemi pohybuje rychlostí 0,99c ve směru kolmo od Slunce.
Která z lodí je nejkratší? Co uvidí piloti jednotlivých raket?



Délka lodě závisí na soustavě, ze které ji měříme ⇒ není možné tvrdit, že některá z raket je kratší.

Pohled pilota modré rakety:

- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- zelená raketa je kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c),
- oranžová raketa je kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c).

Pohled pilota zelené rakety:

- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- modrá raketa je kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c),
- oranžová raketa je ještě kratší než modrá (pohybuje se vůči mě rychleji než 0,99 c – kolik přesně nevím, protože sčítat rychlosti normálně v relativitě nemůžeme).

Pohled pilota oranžové rakety:

- nejdelší je moje raketa (vůči mě stojí),
- modrá raketa je kratší než moje (pohybuje se vůči mě rychlostí 0,99 c),
- zelená raketa je ještě kratší než modrá (pohybuje se vůči mě rychleji než 0,99 c – kolik přesně nevím, protože sčítat rychlosti normálně v relativitě nemůžeme).

Př. 6: Co by musel Albert Einstein dělat při svádění své budoucí manželky, aby díky kontrakci délek vypadal hubenější než ve skutečnosti?

Musel by neustále běhat rychlostí blízkou rychlosti světla ke své lásce a od ní.

Př. 7: Délku jedoucího vlaku můžeme měřit tak, že změříme dobu která uplyne než nás mine začátek a konec vlaku a pak ji vynásobíme rychlostí vlaku. Odvoď pomocí tohoto postupu vztah pro kontrakci délek.

Délku vlaku měříme ve dvou soustavách:

- soustava nádraží *S*,
- soustava vlaku *S'*.

Délka vlaku:

- v soustavě *S* nádraží $l=\Delta t \cdot v$ (čas Δt uplyne než se na jednom místě, kde měříme, objeví začátek a konec vlaku),
- v soustavě *S'* nádraží $l_0=\Delta t' \cdot v$ (v soustavě *S'* má vlak největší délku l_0, čas $\Delta t'$ je čas, který uplynul při měření v soustavě *S*, při pohledu z vlaku, tedy delší než čas Δt, tedy $\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$).

Určíme poměr $\frac{l}{l_0}=\frac{\Delta t \cdot v}{\Delta t' \cdot v}=\frac{\Delta t}{\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\Rightarrow$ $l=l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Stejný vzorec jako u klasického odvození.

Shrnutí: Podobně jako pozorujeme v soustavách, které se vůči nám pohybují prodlužování času, pozorujeme v těchto soustavách také zkracování délek.