

1.1.12 Násobení přirozených čísel

Předpoklady: 010110

Př. 1: Jarda jezdí do práce autem. Každý den tak ujede 4 km. Kolik kilometrů ujede za týden (5 pracovních dní)? Kolik kilometrů ujede za rok (50 pracovních týdnů)? Kolik litrů benzínu projedí při spotřebě 8 litrů na 100 km? Kolik za benzín utratí při ceně 37 Kč/ litr?

Za týden: $4 \cdot 5 = 20$ km

Za rok: $50 \cdot 20 = 1000$ km

Spotřeba benzínu: $8 \cdot 10 = 80$ litrů

Zaplacená cena: $37 \cdot 80 = 2960$ Kč

Jarda projedí za rok na 1000 km 80 litrů benzínu, za který zaplatí 2960 Kč.

Pedagogická poznámka: Překvapivě často se objevují špatné výpočty vzdálenosti ujeté za rok, které vycházejí z toho, že se žáci dosazují nějaké číslo ze zadání místo hodnoty spočtené při hledání odpovědi na předchozí otázku.

Matematickou operaci použitou v předchozím příkladu nazýváme **násobení**.

$$4 \cdot 5 = 20$$

činitel · činitel = součin

Pedagogická poznámka: Na tomto místě pomrkávám po třídě a říkám: "My už něco víme, ale nepovíme".

Př. 2: Jaký reálný děj popisuje násobení?

Opakované přidávání stejně velkých hromádek, počty dlaždic na vydláždění podlahy (velikosti ploch).

Př. 3: Prohlédni si vlastnosti, které mělo sčítání. Rozhodni, zda je má i násobení.

- Komutativnost: (nezáleží na pořadí): Také u násobení nezáleží na pořadí (například $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$) \Rightarrow Pro všechna přirozená čísla a, b platí: $a \cdot b = b \cdot a$ - **násobení je komutativní**.
- Asociativnost: (nezáleží na závorkách): Také u násobení nezáleží na uzávorkování (například $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$) \Rightarrow Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ - **násobení je asociativní**.
- Násobení nulou: Vždy vyjde nula \Rightarrow Pro každé přirozené číslo a platí: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Pedagogická poznámka: O komutativnosti jsme věděli od okamžiku, kdy se objevilo pojmenování čísel vystupujících v součinu.

Pedagogická poznámka: Před zobrazením následujícího příkladu upozorňuji žáky, aby u vlastností násobení vynechali místo na další dva body.

Př. 4: Najdi číslo, které se při násobení chová podobně jako nula při sčítání (číslo, které při násobení nemění výsledek)?

Hledanou vlastnost má jednička (při vynásobení jedničkou, číslo nezmění): Pro každé přirozené číslo a platí: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Př. 5: Pětičlenná Rodina Novákových šla do restaurace na oběd. Všichni si dali to samé: smažený sýr a hranolky za 85 Kč a kofolu za 25 Kč. Kolik za oběd utratili? Najdi oba základní způsoby řešení. Kterou z vlastností násobení příklad demonstruje?

Oběd pro jednoho člena rodiny: $85 + 25 = 110$ Kč.

Oběd pro pět členů rodiny: $5 \cdot 110 = 550$ Kč.

Jedním výrazem: $(85 + 25) \cdot 5 = 550$ Kč

Celkem za jídlo: $85 \cdot 5 = 425$ Kč

Celkem za pití: $25 \cdot 5 = 125$ Kč

Celkem jídlo $425 + 125 = 550$ Kč

Jedním výrazem: $85 \cdot 5 + 25 \cdot 5 = 550$ Kč

Platí: $(85 + 25) \cdot 5 = 85 \cdot 5 + 25 \cdot 5 \Rightarrow$ můžeme roznásobovat závorky (násobení je distributivní).

Pedagogická poznámka: Určitě se najdou oba dva způsoby řešení, které je pak možné na tabuli rozebrat.

Př. 6: Zapiš pravidlo pro distributivnost pomocí písmen.

Pro všechna přirozená čísla platí $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci budou protestovat proti tomu, že ve výrazu $(a + b) \cdot c = ac + bc$ nejsou zapsány násobící tečky. Je třeba je ujistit, že nejde o chybu, ale o úspornější typ zápisu, který se v matematice převažuje.

Př. 7: Které z následujících pokusů o zapsání distributivního zákona jsou správné?

a) $(b + c) \cdot a = ab + bc$

b) $(a + c) \cdot b = ab + bc$

c) $(b + c) \cdot a = ab \cdot ac$

a) $(b + c) \cdot a = ab + bc$ - špatně, roznásobujeme číslem $a \Rightarrow$ v obou sčítancích se musí a vyskytovat \Rightarrow správně $(b + c) \cdot a = ab + ac$.

b) $(a + c) \cdot b = ab + bc$ - správně.

c) $(b + c) \cdot a = ab \cdot ac$ - špatně, z výrazu zmizelo sčítání \Rightarrow správně $(b + c) \cdot a = ab + ac$.

Přehled vlastností operace násobení:

- Nezáleží na pořadí (například $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$) \Rightarrow Pro všechna přirozená čísla a, b platí: $a \cdot b = b \cdot a$ - násobení je komutativní.

- Nezáleží na uzávorkování (například $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$) \Rightarrow Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ - **násobení je asociativní**.
- Při násobení nulou vždy vyjde nula \Rightarrow Pro každé přirozené číslo a platí: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- Při násobení jedničkou se číslo nezmění: Pro každé přirozené číslo a platí: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- Můžeme roznásobovat závorky: Pro všechna přirozená čísla platí $(a + b) \cdot c = ac + bc$ - **násobení je distributivní**.

Pedagogická poznámka: Stejně jako u sčítání i následující příklady pro násobení mám připravené v prezentaci s automatickým časováním. Pouštíme ji dvakrát. Dopředu upozorňuji, že výpočty se dají stihnout jen v případě, že se provedou chytre.

Př. 8: Spočti z paměti.

a) $2 \cdot 3 \cdot 5 =$

b) $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 =$

c) $4 \cdot 3 \cdot 25 =$

d) $2 \cdot 9 + 8 \cdot 9 =$

e) $998 \cdot 4 =$

a) $2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$

b) $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 21 \cdot 10 = 210$

c) $4 \cdot 3 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 3 = 100 \cdot 3 = 300$

d) $2 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = 9(2 + 8) = 9 \cdot 10 = 90$

e) $998 \cdot 4 = (1000 - 2) \cdot 4 = 1000 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 4000 - 8 = 3992$

Př. 9: Hledej a oprav chyby.

a)
$$\begin{array}{r} 231 \\ \cdot 103 \\ \hline 693 \\ 231 \\ \hline 3003 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 472 \\ \cdot 293 \\ \hline 1416 \\ 4048 \\ 944 \\ \hline 136296 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} 231 \\ \cdot 103 \\ \hline 693 \end{array}$$
 Špatně zapsaný výsledek násobení stovkami.

$$\begin{array}{r} 231 \\ \hline 23793 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 472 \\ \cdot 293 \\ \hline 1416 \\ 4248 \end{array}$$
 Špatně připočteno z nižšího řádu na vyznačeném místě.

$$\begin{array}{r} 472 \\ \cdot 293 \\ \hline 1416 \\ 944 \\ \hline 138296 \end{array}$$

Př. 10: Vynásob libovolným způsobem bez kalkulačky.

a) $25 \cdot 37 =$

b) $41 \cdot 326$

c) $417 \cdot 105$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot 25 \\ \hline 185 \\ 74 \\ \hline 925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 326 \\ \cdot 41 \\ \hline 1304 \\ 13366 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 417 \\ \cdot 105 \\ \hline 2085 \\ 417 \\ \hline 43785 \end{array}$$

Př. 11: Doplně do zápisů místo otazníků chybějící číslice.

$$\begin{array}{r} ?61 \\ ?2 \\ a) 15?2 \\ ???5 \\ ???7? \end{array}$$

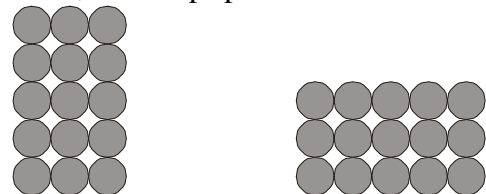
$$\begin{array}{r} ?41 \\ ?? \\ b) 12?? \\ 1??7 \\ \overline{18075} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 761 \\ 52 \\ a) 1522 \\ 3805 \\ \hline 39572 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ 75 \\ b) 1205 \\ 1687 \\ \hline 18075 \end{array}$$

Př. 12: Zdůvodni pomocí obrázku, proč je násobení komutativní.

Výsledek násobení dvou čísel například $3 \cdot 5$ si můžeme znázornit pomocí obdélníkového útvaru o stranách 3 a 5. Je zřejmé, že nezáleží na tom, zda svislou stranu tvoří 3 nebo pět teček, v obou případech tvoří útvar 15 koleček.



Př. 13: Proč je pro tabákovou firmu výhodnější dětský kuřák než člověk, který začne kouřit až v dospělosti? Spočti částku, kterou za život utratí za cigarety kuřák, který umře v 75 letech, pokud začne kouřit: a) 13 letech b) ve 30 letech.

Předpokládej, že vykouří krabičku cigaret (20 kusů) denně.

Potřebné údaje najdi na internetu.

a) dětský kuřák

Doba kouření: $75 - 13 = 62$ let.

Cena jedné krabičky běžných cigaret: 70 Kč.

Prokouřená částka: $70 \cdot 365 \cdot 62 = 1584100$ Kč.

b) dospělý kuřák

Doba kouření: $75 - 30 = 45$ let.

Cena jedné krabičky běžných cigaret: 70 Kč.

Prokouřená částka: $70 \cdot 365 \cdot 45 = 1149750$ Kč.

Kromě podstatně vyšší částky, kterou utratí dětský kuřák, hraje roli i skutečnost, že chování dospívající více ovlivňují jejich vrstevníci a proto je pravděpodobnější, že dětský kuřák strhne více kamarádů.

Shrnutí: Násobení představuje dávání dohromady většího počtu stejně velkých hromádek.