

1.1.16 Číselné výrazy I

Předpoklady: 010115

Pedagogická poznámka: Hlavní náplní hodiny není diskuse o přednosti násobení před sčítáním. Hlavní je sestavování číselných výrazů ve slovní úloze o restauraci.

Př. 1: Odhadni výsledky.

a) $2573 + 121 + 6277 \doteq$

b) $58 \cdot 421 \doteq$

c) $2812 - 941 \doteq$

d) $12453 : 593 \doteq$

e) $528 \cdot 31 + 405 \doteq$

a) $2573 + 121 + 6277 \doteq 2600 + 100 + 6300 = 9000$

Přesně: $2573 + 121 + 6277 = 8971$

b) $58 \cdot 421 = 60$

Přesně: $58 \cdot 421 = 24418$

c) $2812 - 941 = 2800 - 900 = 1900$

Přesně: $2812 - 941 = 1871$

d) $12453 : 593 \doteq 12000 : 600 = 20$ nebo 20 (dělenec jsme zaokrouhlili dolů, dělitel nahoru)

Přesně: $12453 : 593 = 21$

e) $528 \cdot 31 + 405 \doteq 500 \cdot 30 = 15000$ (spíše 16000, oba činitele jsme zaokrouhlovali dolů)

Přesně: $528 \cdot 31 + 405 = 16773$

Pedagogická poznámka: Pokud jde práce rychle od ruky, můžete nechat žáky vyčíslit výrazy na kalkulačce a nechat je spočítat si, o kolik se spletli. Řešení se tím (a ještě více, pokud budete odchylky kontrolovat) hodně prodlouží a ohrozíte konec hodiny.

Číselný výraz: matematický zápis čísel a znamének matematických operací, který můžeme spočítat.

Př. 2: Petr byl nakupovat. Koupil pět jahodových a tři borůvkové jogurty. U obou druhů zaplatil za jeden kus 11 Kč. Kolik zaplatil celkem? Zapiš výsledek příkladu pomocí jednoho číselného výrazu, ve kterém použiješ pouze hodnoty ze zadání.

Petr zaplatil:

- jahodové: $5 \cdot 11 = 55$,
- borůvkové: $3 \cdot 11 = 33$,

celkem: $55 + 33 = 88$.

Zápis jedním číselným výrazem: $(5 \cdot 11) + (3 \cdot 11) = 88$.

Jiný postup:

celkem jogurtů: $5 + 3 = 8$,

celkem zapláceno: $8 \cdot 11 = 88$.

Zápis jedním číselným výrazem: $(5 + 3) \cdot 11 = 88$.

Pedagogická poznámka: Zápisů u předchozího příkladu se většinou objeví víc (ne všechny $5 \cdot 11 = 55$ jdou považovat za číselné výrazy, například $3 \cdot 11 = \frac{33}{88}$). Nechám si je nadiktovat a pak je roztřídíme do dvou skupin zapsaných v řešení.

Pedagogická poznámka: Velká většina žáků si samozřejmě pamatuje, že násobení má přednost před sčítáním. Jako důvod uvádějí, že jím to říkali ve škole (což odmítám s tím, že to samozřejmě žádný důvod není, a uvedu pár perel, které jsem se musel učit ve škole já).

Víme: U sčítání a násobení nezáleží na pořadí ani na uzávorkování. Nemohli bychom se závorek zbavit?

Čemu se rovná: $5 + 3 \cdot 11$?

Dvě možnosti:

- $5 + 3 \cdot 11 = 5 + 33 = 38$,
- $5 + 3 \cdot 11 = 8 \cdot 11 = 88$.

Dva různé výsledky \Rightarrow dobře musí být jen jeden z nich \Rightarrow musí existovat pravidlo, které rozhodne, který z obou způsobů je správný.

Násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním.

Proč to není obráceně?

Co znamená $3 \cdot 11$? Sesypeme tři hromádky, na každé z nich je 11 věcí (násobení není nic jiného než opakované sčítání stejných hromádek) \Rightarrow můžeme psát $3 \cdot 11 = 11 + 11 + 11$.

Zkusíme si to dosadit do výrazu: $5 + 3 \cdot 11 = 5 + 11 + 11 + 11 = 38$.

Výraz $5 + 3 \cdot 11$ znamená: Sesypeme dohromady tři hromádky po jedenácti a pak k tomu přidám 5 \Rightarrow na společné hromadě bude 38 \Rightarrow pokud máme dojít při vyčíslování výrazu ke správnému výsledku, musíme dát přednost násobení před sčítáním.

Násobení představuje zkratku pro opakované sčítání a proto ho vyčíslujeme jako první (jinak by se změnila informace o tom, kolik a jakých čísel máme opakovaně sčítat).

Závorky ve výrazu $(5 \cdot 11) + (3 \cdot 11) = 88$ jsou proto zbytečné. I bez nich bychom počítali správně (kvůli přednosti násobení): $5 \cdot 11 + 3 \cdot 11 = 55 + 33 = 88$.

Druhý postup řešení slovní úlohy $(5 + 3) \cdot 11 = 88$ je trochu výhodnější (prováděli jsme jenom dvě operace). Bez závorek $5 + 3 \cdot 11$ ho napsat nemůžeme (kvůli přednosti násobení).

Výraz v závorce vyčíslujeme jako první.

Závorky, které nemění hodnotu výrazu, můžeme vypustit.

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu si na tabuli ukazujeme, jak by měl vypadat pořádný zápis (včetně postupu a šipek, které ukazují na stejné případně různé výsledky).

Př. 3: Spočti. Změni přidání závorek pokaždé výsledek? Proč?

a) $3+5\cdot 4+6$ b) $3+5\cdot(4+6)$ c) $3+(5\cdot 4)+6$ d) $(3+5)\cdot(4+6)$

a) $3+5\cdot 4+6=3+20+6=29$

b) $3+5\cdot(4+6)=3+5\cdot 10=3+50=53$

c) $3+(5\cdot 4)+6=3+20+6=29$

d) $(3+5)\cdot(4+6)=8\cdot 10=80$

Přidání závorek do výrazu nemusí změnit jeho hodnotu, pokud do závorek uzavřeme část, kterou bychom stejně počítali jako první (v našem konkrétním případě násobení).

Př. 4: Najdi závorky, které můžeme vypustit bez toho, aby změnila hodnota výrazu.

a) $2\cdot(3-1):4+(3\cdot 1)+4$ b) $3\cdot 2\cdot(4-1)+(7-3)$

a) $2\cdot(3-1):4+(3\cdot 1)+4$ - Označenou závorku můžeme vypustit, nemění hodnotu výrazu, uzavírá operaci násobení, která má přednost.

b) $3\cdot 2\cdot(4-1)+(7-3)$ - Označenou závorku můžeme vypustit, nemění hodnotu výrazu, uzavírá operaci odčítání, která má stejnou přednost jako okolní operace sčítání.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je spíše synchronizační (a zcela schválně není hned za povídáním o přednosti násobení). Nečekáme než jej všichni dopočítají a vrháme se na příklad 6.

Př. 5: Vypočti.

a) $26+4\cdot 9$ b) $251+12\cdot 71$ c) $4\cdot 3\cdot 5+28$

a) $26+4\cdot 9=26+36=62$

b) $251+12\cdot 71=251+852=1103$

c) $4\cdot 3\cdot 5+28=60+28=88$

Př. 6: Novákovi a Dvojrádskovi šli do jídelny na oběd. Rodinu Novákových tvoří čtyři lidé, rodina Dvojrádskových má členy pouze tři. Jídelní lístek je krátký: polévka česnečka 26 Kč, vepřo-knedlo-zelo 75 Kč, řízek se salátem 95 Kč, smažený sýr 70 Kč. K pití je kofola za 20 Kč nebo minerálka za 15 Kč.

Novákovi si všichni dali smažený sýr, bez polévky s kofolou, Dvojrádskovi pak měli česnečku, řízek se salátem a minerálku. Napiš číselný výraz sestavený z čísel udaných v zadání, který udává:

a) Částku, kterou za oběd zaplatili Novákovi.

b) Částku, kterou za oběd zaplatili Dvojrádskovi.

c) Částku, zaplacenou za pití.

d) O kolik více zaplatili Dvojrádskovi než Novákovi.

e) Kolik korun vrátil číšník panu Novákovi, který zaplatil za svou rodinu tisícikorunou.

a) Částku, kterou za oběd zaplatili Novákovi.

Smažený sýr s kofolou: $70+20$ Kč.

Čtyři lidé, každý smažený sýr s kofolou: $4(70+20)=4\cdot 90=360$ Kč.

b) Částku, kterou za oběd zaplatili Dvojřádkovi.

Česnečka, řízek a minerálka: $26 + 95 + 15$ Kč.

Tři lidé, každý česnečku, řízek a minerálku: $3(26 + 95 + 15) = 3 \cdot 136 = 408$ Kč.

c) Částku, zaplacenou za pití.

Čtyři kofoly: $4 \cdot 20$ Kč.

Tři minerálky: $3 \cdot 15$ Kč.

Čtyři kofoly a tři minerálky: $4 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 80 + 45 = 125$ Kč.

d) O kolik více zaplatili Dvojřádkovi než Novákovi.

$3(26 + 95 + 15) - 4(70 + 20) = 3 \cdot 136 - 4 \cdot 90 = 408 - 360 = 48$ Kč

e) Kolik korun vrátil číšník panu Novákovi, který zaplatil za svou rodinu tisícikorunou.

$1000 - 4(70 + 20) = 1000 - 4 \cdot 90 = 1000 - 360 = 640$ Kč

Pedagogická poznámka: Žáci se budou snažit výrazy ihned vyčíslovat a už vůbec nebudou postupovat pomalu po krocích, jak je uvedeno v učebnici. V tomto okamžiku to neřeším, jde mi jen o postupné sestavení výrazů. Nechci, aby žáci rozepisovali tak, jak je uvedeno v učebnici, ale aby svůj výraz nepsali najednou, ale vytvářeli ho postupně naznačeným způsobem (což se samozřejmě budou učit velmi dlouho).

Dodatek: Dvojřádkovi se původně jmenovali Dvořákoví (je zajímavé, že se žáci často ptají, proč nemají normální jméno jako Novákovi), ale nebyli spokojeni s tím, že mají obyčejné jméno a pořad si je někdo plete se spoustou jiných Dvořáků a tak se rozhodli změnit své příjmení vložením dvou počátečních písmen podle manželů Jany a Davida.

Př. 7: Pokus se najít význam následujících číselných výrazů, podle zadání předchozího příkladu.

a) $26 + 75 + 20$

b) $2 \cdot 20 + 2 \cdot 95$

c) $20 - 15$

a) $26 + 75 + 20$: Cena, kterou zaplatí strážník za česnečku, knedlo-zelo-vepřo a kofolu.

b) $2 \cdot 20 + 2 \cdot 95$: Cena, kterou zaplatí dva lidé za řízek se salátem a kofolu.

c) $20 - 15$: Rozdíl v ceně obou nápojů

Př. 8: Vrať se k výrazu $2 + 3 \cdot 4$. Sčítání i násobení jsou komutativní operace. Zkus napsat, všechny možnosti, jak by mělo být možné čísla ve výrazu proházet. U každé možnosti pak spočti hodnotu výrazu tak:

a) že budeš dodržovat přednost násobení před sčítáním,

b) že budeš dávat sčítání přednost před násobením.

Co jsi zjistil?

Všechny možnosti prohazování čísel: $2 + 3 \cdot 4$, $2 + 4 \cdot 3$, $3 \cdot 4 + 2$, $4 \cdot 3 + 2$.

Výraz	Výsledek přednost násobení	Výsledek přednost sčítání
$2 + 3 \cdot 4$	$2 + 12 = 14$	$5 \cdot 4 = 20$

$2 + 4 \cdot 3$	$2 + 12 = 14$	$8 \cdot 3 = 24$
$3 \cdot 4 + 2$	$12 + 2 = 14$	$3 \cdot 8 = 24$
$4 \cdot 3 + 2$	$12 + 2 = 14$	$4 \cdot 5 = 20$

Zatímco ve sloupci, kde jsme používali pravidlo o přednosti násobení, jsme ve všech případech získali stejný výsledek (sčítání i násobení jsou komutativní), ve sloupci, kde jsme dávali přednost sčítání, jsme získali dva různé výsledky (sčítání a násobení nejsou komutativní) \Rightarrow pokud chceme, aby sčítání a násobení zůstalo komutativní i v situaci, kdy obě operace kombinujeme, musíme dávat násobení přednost před sčítáním.

Shrnutí: V číselných výrazech, kde vystupuje násobení i sčítání, vyčíslujeme přednostně násobení. Priority můžeme upravit pomocí závorek, které se vyčíslují nejdříve.