

1.3.2 Množina všech dělitelů

Předpoklady: 010301

Pedagogická poznámka: Na začátku si rozebereme řadu z poslední Odpočítávané. Na způsob jejího generování většinou nikdo nepřijde a proto ji dostanou žáci domů na rozmyšlenou.

Jedna z řad, které jsme hráli v Odpočítávané: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, jaké pravidlo určuje další číslo v řadě?

- Postupně přičítáme lichá čísla: $1+3=4$, $4+5=9$, $9+7=16$, $16+9=25$, ...
- Řadu tvoří čísla, která získáme je součin čísla se sebou samým: $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 5 = 25$, ...

Pedagogická poznámka: Pojem druhé mocniny v tuto chvíli rozhodně nezavádím.

Poměrně často potřebujeme v matematice najít všechny dělitele určitého čísla. Pokus se najít všechny dělitele čísla 10.

$10 = 2 \cdot 5$ nebo $10 = 1 \cdot 10 \Rightarrow$ děliteli čísla 10 jsou čísla 1, 2, 5, 10.

Často píšeme $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$. Říkáme, že množinu všech dělitelů čísla 10 tvoří čísla 1, 2, 5 a 10.

Dodatek: Slovo množina používáme v matematice pro označení skupin, souhrnů čísel nebo jiných "věcí", které se označují jako prvky.

Jak určit všechny dělitele v jiných případech (například u čísla 12)?

Zkoušíme číslo 12 dělit a nalezené dělitele doplňujeme do tabulky.

$$12:1=12 \Rightarrow 1,12$$

$$12:2=6 \Rightarrow 2,6$$

$$12:3=4 \Rightarrow 3,4$$

$$12:4=3 \Rightarrow 4,3$$

$$12:6=2 \Rightarrow 6,2$$

$$12:12=1 \Rightarrow 12,1$$

Postupně vyplníme přehlednou tabulku.

12	1	2	3	4	6	12
	12	6	4	3	2	1

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Př. 1: Bylo nutné při hledání všech dělitelů čísla 12 zkusit všechna přirozená čísla menší než 12?

Všechny dělitele jsme do tabulky zapsali dvakrát, protože se vždy objevují ve dvojicích \Rightarrow stačí je zapsat jednou, jakmile je objevíme poprvé \Rightarrow jakmile najdeme dvojici dělitelů podruhé, můžeme hledání zastavit.

Získáme tak kratší tabulku, která přesto obsahuje všechny dělitele.

12	1	2	3
----	---	---	---

	12	6	4
--	----	---	---

Pedagogická poznámka: Že jsme každého dělitele objevili dvakrát si žáci všimnou určitě, pak se rozhoří diskuse o tom, kde je třeba zastavit. V tomto okamžiku netlačím diskusi k tomu, abychom objevili druhou odmocninu, stačí, když se shodneme, že zastavíme, jakmile se objeví první dělitel podruhé nebo když se dostaneme do poloviny čísla (v případě, že žádné dělitele neobjevíme).

Př. 2: Najdi všechny dělitele čísel: 7, 9, 15, 24, 36.

$$7:1=7 \Rightarrow 1,7$$

$$7:2 = \text{se zbytkem}$$

$$7:3 = \text{se zbytkem}$$

$$7:4 = \text{se zbytkem, jsme za polovinou} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_7 = \{1, 7\}$$

$$9:1=9 \Rightarrow 1,9$$

$$9:2 = \text{se zbytkem}$$

$$9:3=3 \Rightarrow 3 \text{ našli jsme číslo dvakrát} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_9 = \{1, 3, 9\}$$

$$15:1=15 \Rightarrow 1,15$$

$$15:2 = \text{se zbytkem}$$

$$15:3=5 \Rightarrow 3,5$$

$$15:4 = \text{se zbytkem}$$

$$15:5=3 \Rightarrow \text{našli jsme číslo podruhé} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$24:1=24 \Rightarrow 1,24$$

$$24:2=12 \Rightarrow 2,12$$

$$24:3=8 \Rightarrow 3,8$$

$$24:4=6 \Rightarrow 4,6$$

$$24:5 = \text{se zbytkem}$$

$$24:6=4 \Rightarrow \text{našli jsme číslo podruhé} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$36:1=36 \Rightarrow 1,36$$

$$36:2=18 \Rightarrow 2,18$$

$$36:3=12 \Rightarrow 3,12$$

$$36:4=9 \Rightarrow 4,9$$

$$36:5 = \text{se zbytkem}$$

$$36:6=6 \Rightarrow \text{našli jsme číslo dvakrát} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Pedagogická poznámka: Netrvám na tom, aby žáci přesně dodržovali zápis v učebnici a nechávám je postupovat, jak chtějí. Pokud však některé z čísel zapomenou, je prvním pokynem návrat k postupnému a systematickému řešení. Snažím se tedy, aby systematickost nebyla něčím mnou vnuceným, ale něčím, co pomáhá v nesnázích.

Př. 3: U všech přirozených čísel (s jedinou výjimkou) je možné najít stejný počet takzvaných samozřejmých dělitelů. Kolik samozřejmých dělitelů u každého přirozeného čísla najdeme? Jaká čísla to jsou? Které přirozené číslo je výjimkou?

U každého čísla jsme našli dva dělitele:

- číslo 1,
- dělené číslo (například u 7 číslo 7).

Tyto dva dělitele najdeme u každého čísla, proto je nazýváme samozřejmé. Každé číslo kromě čísla 1 má dva samozřejmé dělitele - číslo 1 a samo sebe.

Př. 4: Najdeme u přirozeného čísla více násobků nebo více dělitelů?

Počet dělitelů se u různých čísel liší (číslo 1 má jednoho dělitele, číslo 7 dva, číslo 36 šest), násobků má každé přirozené číslo nekonečně mnoho (například násobky čísla 2: 2,4,6,8,10 ...) ⇒ každé přirozené číslo má více násobků než dělitelů.

Pedagogická poznámka: Značný počet žáků začne tvrdit (samozřejmě bez jakéhokoli důvodu, že jich je stejně), rozhodně jim neříkám správné řešení, chci aby si zvolili libovolné číslo a zkusili si jak násobky, tak dělitele najít. Hlavním přínosem příkladu by mělo být poznání, že když doopravdy zkusím na něco přijít a nestřílím, většinou to zjistím.

Př. 5: Kolik je mezi čísly menšími než 100:
a) násobků 11 b) násobků 3?

a) násobky 11

Násobky 11: 11, 22, 33, 44, ... ⇒ Násobků 11 menších než 100 je 9 (největším je číslo 99).

b) násobky 3

Násobky 3: 3, 6, 9, 12, ... (příliš mnoho čísel na prosté počítání) ⇒ největší násobek 3 menší než 100 je číslo 99, $99 : 3 = 33$ ⇒ násobků 3 menších než 100 je 33 (získali jsme je tak, že jsme číslo 3 postupně násobili čísly 1, 2, 3, ... 33).

Př. 6: Petr tvrdí: "U všech přirozených čísel je libovolný násobek větší než libovolný dělitel". Je to pravda?

Ověříme si Petrovo tvrzení na konkrétním čísle.

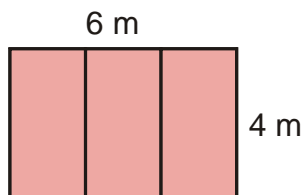
$$D_7 = \{1, 7\}$$

Násobky 7: 7, 14, 21, 28, ...

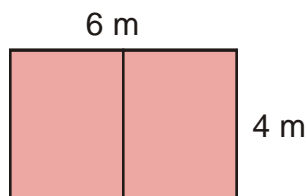
Vidíme, že největší dělitel čísla (samo číslo) je stejně jako jeho nejmenší násobek (samo číslo) ⇒ Petrovo tvrzení není správné (zapomněl na číslo samo, správně by věta zněla " U všech přirozených čísel je libovolný násobek větší než libovolný dělitel různý od tohoto čísla).

Pedagogická poznámka: Můžete žáky vyzvat k úpravě, která povede k tomu, že věta bude pravdivá.

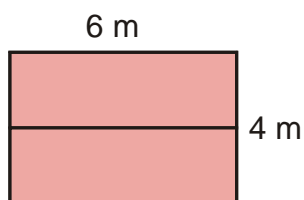
Př. 7: V obchodech se prodávají koberce o šířkách 2 m, 3 m, 4 m a 5 m. Kancelář má rozměry 6 m x 4 m. Jakou šířku koberce a kolik délkových metrů máme koupit, aby se stříhalo co nejméně (nestříhalo se podélně a využila se celá šířka koberce), pokryla se celá podlaha a nekombinovali jsme koberce různých šířek? Jak poznáme, které šířky můžeme použít?



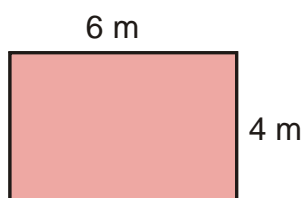
Celkem $3 \cdot 4 = 12$ m koberce o šířce 2 m.



Celkem $2 \cdot 4 = 8$ m koberce o šířce 3 m.



Celkem $2 \cdot 6 = 12$ m koberce o šířce 3 m.



Celkem 6 m koberce o šířce 4 m.

Použít můžeme pouze takové šířky koberce, které jsou děliteli šířky nebo délky místnosti.

Př. 8: Sedminásobek neznámého čísla je větší než 46 a menší než 61. Urči neznámé číslo.

Násobky sedmi větší než 46 a menší než 61:

$49 = 7 \cdot 7 \Rightarrow$ hledaným číslem je číslo 7,

$56 = 7 \cdot 8 \Rightarrow$ hledaným číslem je číslo 8.

Neznámým číslem je buď číslo 7 nebo číslo 8.

Př. 9: Víme, že číslo a je násobek čísla b . Co můžeme prohlásit o číslu b ?

Číslo a je násobek čísla $b \Rightarrow$ platí $a = k \cdot b \Rightarrow$ číslo b je dělitel čísla a .

Pedagogická poznámka: Hra Tleskni dupni je převzata z učebnice Hejný a kol, Matematika 5, Fraus, 2011.

Hru vysvětluji chvilku před koncem hodiny, zbytek hodiny pak mají děti na trénink ve čtveřicích.

Spíše než přípravu k probírání společného násobku, vidím hru jako nácvik soustředění.

Hra Tleskni

Čtyři role:

- Hlasatel ve dvou sekundových intervalech postupně hlásí čísla 0, 1, 2, 3.
- Tleskač na každé druhé číslo tleskne.
- Dupač na každé třetí číslo dupne.
- Hlídač hlídá, zda někdo nepodvádí.

Jak dlouho vydrží tleskač (dupač) tleskat (dupat) bez chyby?

Shrnutí: Systematickým postupem můžeme najít všechny dělitele libovolného čísla.