

1.3.13 Hledání prvočísel

Předpoklady: 010312

Př. 1: Postup, který jsme pro vyhledání všech prvočísel použili, se nazývá podle starořeckého matematika Eratosthenovo síto. Sestav postup, jak pomocí Eratosthenova síta najít všechna prvočísla menší než libovolné velké zvolené číslo (v našem případě jsme hledali všechna prvočísla menší než 100).

Nejdříve se objeví návrhy podobné následujícímu.

1. Vypíšeme si všechna přirozená čísla menší než zvolené číslo (čísla, mezi kterými máme prvočísla najít).
2. Vyškrtneme všechny násobky dvojky (kromě dvojky samotné).
3. Vyškrtneme všechny násobky trojky (kromě trojky samotné).
4. Vyškrtneme všechny násobky pětky (kromě pětky samotné).
5. Vyškrtneme všechny násobky sedmi (kromě sedmičky samotné).
6. Postupně procházíme další čísla od nejmenšího a jakmile narazíme na nepřeskrtnuté číslo, vyškrtneme všechny jeho násobky (kromě něj).
7. Nepřeskrtnutá čísla (kromě jedničky) jsou prvočísla.

Obecný postup

1. Vypíšeme si všechna přirozená čísla menší než zvolené číslo (čísla, mezi kterými máme prvočísla najít).
2. Jedničku vynecháme.
3. Postupně vypsaná čísla procházíme podle velikosti od nejmenšího. Pokud číslo není přeskrtnuté, jde o prvočísla. Vyškrtneme všechny jeho násobky, kromě jeho samotného. Pokud je číslo přeskrtnuté, nic neděláme a pokračujeme dále.

Pedagogická poznámka: Postup sestaví žáci na třech úrovních:

jen konkrétně pro vyškrťování násobků 2, 3, 5, 7,
poloobecně tak, jak je uvedeno v řešení,

obecně (žáci si uvědomí, že bod 6 pokrývá i všechno předchozí škrtnání).

Při kontrole se snažíme diskutovat dojdít k tomu, aby obecné řešení přijali pokud možno všichni. Vznáším požadavek, aby postup neobsahoval určení žádného jiného konkrétního čísla než jedničky.

Takto jsme hledali množinu všech dělitelů čísla 36.

$$36:1=36 \Rightarrow 1,36$$

$$36:2=18 \Rightarrow 2,18$$

$$36:3=12 \Rightarrow 3,12$$

$$36:4=9 \Rightarrow 4,9$$

$$36:5 = \text{se zbytkem}$$

$$36:6=6 \Rightarrow \text{našli jsme číslo dvakrát} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Pokud se nám podaří vydělit beze zbytku, najdeme dva dělitele (menšího a většího) nebo jeden dělitel dvakrát.

$733 : 29 = 25,27\dots \Rightarrow$ nemá smysl dělit většími prvočísly (podíl vychází menší než dělitel, přešli jsme přes tvar, který se nejvíce podobal čtverci) \Rightarrow číslo 733 je prvočíslo.

d) 961

Postupně dělíme čísly: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$961 : 31 = 31 \Rightarrow$ číslo 961 je prvočíslo.

Př. 6: Najdi největší prvočíslo, které je menší než:

a) 10000

b) 1 000 000

Co budeš k takovému hledání potřebovat?

V obou případech budeme potřebovat seznam prvočísel.

a) Největší prvočíslo menší než 10 000

Potřebujeme seznam prvočísel menších než 100 (máme z příkladu 2).

Největší číslo menší než 10000: 9999 dělitelné třemi, zkusíme další postupně menší lichá čísla (sudá jsou jasně dělitelná)

9997: dělíme čísly 5, 7, 11, 13 $\Rightarrow 9997 : 13 = 769$

9995: dělitelné 5

9993: dělitelné 3

9991: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 $\Rightarrow 9991 : 97 = 103$

9989: dělíme čísly 7 $\Rightarrow 9989 : 7 = 1427$

9987: dělitelné 3

9985: dělitelné 5

9983: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 \Rightarrow

$9983 : 67 = 149$

9981: dělitelné 3

9979: dělíme čísly 7, 11, 13, 17 $\Rightarrow 9979 : 17 = 587$

9977: dělíme čísly 7, 11 $\Rightarrow 9977 : 11 = 907$

9975: dělitelné 5

9973: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \Rightarrow žádným z uvedených čísel není číslo 9973 dělitelné \Rightarrow číslo 9973 je největší prvočíslo menší než 10 000.

b) Největší prvočíslo menší než 1000000

Potřebujeme seznam prvočísel menších než 1000.

Postupujeme stejně, hledaným číslem je číslo 999983.

Shrnutí: Dělitele vždy najdeme ve dvojicích.