

1.3.16 Společné násobky

Předpoklady: 010315

Pedagogická poznámka: Klasicky je možné naučit žáky hledat nsn a NSD pomocí prvočíselných rozkladů. Značná část z nich však přijme oba poznatky čistě mechanicky. Následující dvě hodiny jsou pokusem o trochu jiný přístup, jeho úspěšnost se teprve ukáže.

Pedagogická poznámka: „Tleskni, dupni“ doopravdy hrajeme způsobem popsáním v minulé hodině. Celkem čtyřikrát (příklad 1, příklad 2 body a) b) a příklad 3), celá třída se tak stihne vystřídat ve všech třech rolích (dupač, tleskač, hlídač).

Př. 1: Při hře „Tleskni, dupni“ se změnila pravidla. Tleskači netleskají na každé druhé číslo, ale na každé čtvrté. Při kterých číslech bychom měli slyšet tlesknutí i dupnutí najednou?

Tlesknutí i dupnutí uslyšíme najednou při čísle, které je:

- násobkem 4 (tleskání),
- násobkem 3 (dupání).

Vypíšeme si podezřelá čísla:

- násobky 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 26, 30, ...
- násobky 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

Tlesknutí i dupnutí poprvé uslyšíme najednou při čísle 12, poté pak při číslech 24, 36 (násobky 12).

Zkoumali jsme dvě čísla a jejich násobky:

- **násobky 4:** 4, 8, 12, 16, 20, 24, 26, 30, ...
- **násobky 3:** 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

Čísla, na které slyšíme tlesknutí i dupnutí jsou násobky 4 i 3, proto jim říkáme **společné násobky** (12, 24, 36, 48, ...). Číslo 12 je ze všech společných násobků nejmenší proto mu říkáme **nejmenší společný násobek** (značíme ho **nsn**)

Všechny společné násobky jsou násobky toho nejmenšího (nejmenšího společného násobku).

Př. 2: Při jakém nejmenším čísle uslyšíme tlesknutí i dupnutí najednou pokud:

- a) Tleskač tleská na každé třetí a dupač dupe na každé páté číslo.
- b) Tleskač tleská na každé třetí a dupač dupe na každé sedmé číslo.
- c) Tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé páté číslo.
- d) Tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé sedmé číslo.

Sleduj řešení příkladů a hledej pravidlo, které by Ti umožnilo určit nejmenší číslo, při kterém uslyšíme tlesknutí i dupnutí, co nejpohodlněji.

a) Tleskač tleská na každé třetí a dupač dupe na každé páté číslo.

- Tleskač tleská na čísla: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
- Dupač dupe na čísla: 5, 10, 15, 20, ...

Poprvé uslyšíme tlesknutí i dupnutí společně při čísle 15.

b) Tleskač tleská na každé třetí a dupač dupe na každé sedmé číslo.

- Tleskač tleská na čísla: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...
- Dupač dupe na čísla: 7, 14, 21, 28, ...

Poprvé uslyšíme tlesknutí i dupnutí společně při čísle 21.

c) Tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé páté číslo.

- Tleskač tleská na čísla: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...
- Dupač dupe na čísla: 5, 10, 15, 20, ...

Poprvé uslyšíme tlesknutí i dupnutí společně při čísle 20.

Zdá se, že nejmenší společný násobek najdeme tak, že obě čísla vynásobíme.

d) Tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé sedmé číslo.

- Tleskač tleská na čísla: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...
- Dupač dupe na čísla: 7, 14, 21, 28, 35, ...

Poprvé uslyšíme tlesknutí i dupnutí společně při čísle 28.

Zdá se, že nejmenší společný násobek najdeme jako součin dvou čísel, ke kterým ho hledáme.

Pedagogická poznámka: Předchozí závěr je zcela přirozený a dojde k němu velká většina třídy.

Př. 3: Při jakém nejmenším čísle uslyšíme tlesknutí i dupnutí najednou pokud tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé šesté číslo?

Tleskač tleská na každé čtvrté a dupač dupe na každé šesté číslo.

- Tleskač tleská na čísla: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...
- Dupač dupe na čísla: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

Poprvé uslyšíme tlesknutí i dupnutí společně při čísle 12.

Pedagogická poznámka: Většina (obrovská) při předchozím příkladu už dávno násobky nevypisuje a dojde v souladu se závěrem předchozího příkladu k závěru, že nejmenším společným násobkem bude číslo $6 \cdot 4 = 24$. Zastánci 12 zbytek rychle přesvědčí (je to evidentní), přesto si pro jistotu tento případ i odehrajeme. Pak hned řešíme, kde se stala chyba.

Pedagogická poznámka: Uvedené příčiny jsou skutečnými názory dětí.

Proč nám přestalo fungovat pravidlo, které se před tím tolikrát osvědčilo?
Čím se čísla 4 a 6 liší od předchozích dvojic?

Možné důvody:

- Pravidlo funguje pouze, když je alespoň jedno číslo liché (4 a 6 je první dvojice, kde jsou obě čísla sudá).
- Pravidlo funguje pouze, když je alespoň jedno z čísel prvočíslo.
- Pravidlo nefunguje, protože v obou číslech je schované stejné číslo (dvojka).

Jak rozhodneme?

Zřejmě hraje roli, jak jsou čísla ve dvojici složena z prvočísel \Rightarrow sepíšeme si dvojice i nalezený nejmenší společný násobek do přehledné tabulky. U každého z čísel uvedeme i prvočíselný rozklad (abychom viděli, jak je složené).

$4 = 2 \cdot 2$	3	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	
3	5	$15 = 3 \cdot 5$	
3	7	$21 = 3 \cdot 7$	
$4 = 2 \cdot 2$	5	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	
$4 = 2 \cdot 2$	7	$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$	
$4 = 2 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	Podle pravidla $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, chybí tam 2.

Zkusíme doplnit tabulku o další dvojice, které by mohli vyjasnit odpověď na naše otázky.

- Pravidlo funguje pouze, když je alespoň jedno číslo liché (4 a 6 je první dvojice, kde jsou obě čísla sudá) \Rightarrow zkusíme dvojici čísel, která jsou obě lichá a pravidlo nebude fungovat (třeba čísla 3 a 9, která mají společnou trojku a řeší i další bod).
- Pravidlo funguje pouze, když je alespoň jedno z čísel prvočíslo \Rightarrow zkusíme najít dvojici složených čísel, pro která pravidlo funguje (zkusíme třeba čísla 4 a 9, která jsou složená a nemají nic společného).
- Pravidlo nefunguje, protože v obou číslech je schované stejné číslo (dvojka) \Rightarrow zkusíme další dvojice, které mají něco společného (například 6 a 9 nebo 12 a 16).

Př. 4: Dopln tabulku pro hledání nejmenších společných násobků o následující dvojice čísel: a) 3 a 9 b) 4 a 9 c) 6 a 9 d) 12 a 16

Nejmenší společný násobek 3 a 9:

- 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...
- 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, ...

\Rightarrow nejmenší společný násobek čísel 3 a 9 je číslo 9.

Nejmenší společný násobek 4 a 9:

- 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, ...
- 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, ...

\Rightarrow nejmenší společný násobek čísel 4 a 9 je číslo 36.

Nejmenší společný násobek 6 a 9:

- 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...
- 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, ...

\Rightarrow nejmenší společný násobek čísel 6 a 9 je číslo 18.

Nejmenší společný násobek 12 a 16:

- 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...
- 16: 16, 32, 48, 64, 80, ...

\Rightarrow nejmenší společný násobek čísel 12 a 16 je číslo 48.

Číslo	Číslo	nsn	Platí pravidlo?
$4 = 2 \cdot 2$	3	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	Násobící pravidlo platí.
3	5	$15 = 3 \cdot 5$	Násobící pravidlo platí.
3	7	$21 = 3 \cdot 7$	Násobící pravidlo platí.
$4 = 2 \cdot 2$	5	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	Násobící pravidlo platí.

$4 = 2 \cdot 2$	7	$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$	Násobící pravidlo platí.
$4 = 2 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	Do pravidla $4 \cdot 6 = 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ v nsn chybí 2.
3	$9 = 3 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	Do pravidla $3 \cdot 9 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
$4 = 2 \cdot 2$	$9 = 3 \cdot 3$	$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	Násobící pravidlo platí.
$6 = 2 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$	Do pravidla $6 \cdot 9 = 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
$12 = 2^2 \cdot 3$	$16 = 2^4$	$48 = 2^4 \cdot 3$	Do pravidla $12 \cdot 16 = 192 = 2^6 \cdot 3$ v nsn chybí 2^2 .

Shrnutí: Složená čísla můžeme postupným dělením jednoznačně rozložit na součin prvočísel.