

1.3.20 Dlaždění III

Předpoklady: 010319

Př. 1: Najdi $n(84,96)$, $D(84,96)$.

$$84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

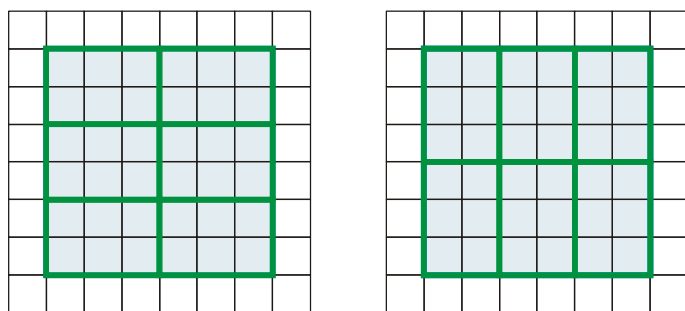
$$D(84,96) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \text{ (společné části rozkladů)}$$

$$n(84,96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 672 \text{ (nejmenší rozklad, do kterého se schovají oba rozklady).}$$

Opakování z minulé hodiny:

- Při dlaždění obdélníků hledáme takové dlaždice, jejichž rozměr je dělitelem obou rozměrů obdélníku.

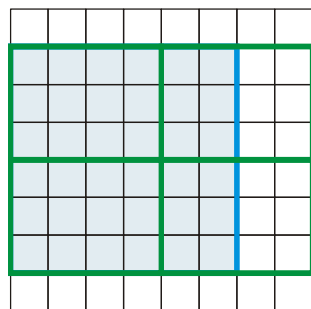
Př. 2: Nakresli na čtverečkový papír čtverec 6×6 . Je možné ho vydláždit obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 2×3 cm? Nakresli jak. Kolik dlaždic budeme potřebovat? Je možné čtverec 6×6 vydláždit dlaždicemi 4×3 ?



Obě možnosti, představují to samé dlaždění, obrázky jsou jen otočené o 90° .

Potřebujeme $2 \cdot 3 = 6$ dlaždic.

Dlaždicemi 4×3 čtverec 6×6 nevydláždíme.



Jednu stranu můžeme pokrýt dvě dlaždicemi (stranou s rozměrem 3), ale na druhou stranu rozměr dlaždice 4 nevyjde (jedna je málo, dvě jsou moc).

Pedagogická poznámka: Někteří žáci pochopí, že jde o dělitelnost ihned jiní až v průběhu dalšího příkladu. Nikdy to však neříkáme dřív než při kontrole následujícího příkladu.

Př. 3: Máme čtvercovou plochu 12×12 . Rozhodni, zda ji můžeme vydláždit obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech:
a) 2×3 b) 3×4 c) 2×8 d) 3×5 e) 4×7
Hledej pravidlo, podle kterého je možné i bez kreslení rozhodnout, jaký typ dlaždic je použitelný.

Dlážďíme čtverec 12×12 .

a) dlaždice 2×3

12 je dělitelné 2 i $3 \Rightarrow$ čtverec 12×12 můžeme vydláždit dlaždicemi 2×3 .

b) dlaždice 3×4

12 je dělitelné 2 i $4 \Rightarrow$ čtverec 12×12 můžeme vydláždit dlaždicemi 3×4 .

c) dlaždice 2×8

12 není dělitelné $8 \Rightarrow$ čtverec 12×12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 3×4 .

d) dlaždice 3×5

12 není dělitelné $5 \Rightarrow$ čtverec 12×12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 3×5 .

e) dlaždice 4×7

12 není dělitelné $7 \Rightarrow$ čtverec 12×12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 4×7 .

Pro dlážďení čtverce můžeme použít pouze dlaždice, jejichž oba rozměry jsou děliteli rozměru čtverce.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu je důležitý bod c). Občas se objeví žák, který rozhoduje o tom, zda je možné dlážďit, přes obsahy. Spočte obsah čtverce i dlaždice a pokusí se je vydělit. Tímto postupem zjistí, že je možné čtverec 12×12 dlaždicí 2×8 vydlážďit, ačkoliv z obrázku (který si na mou výzvu nakreslí) je okamžitě zřejmé, že to možné není.

Př. 4: Máme čtvercovou plochu o rozměrech 20×20 . Rozhodni, které z následujících obdélníkových dlaždic můžeme použít na její vydlážďení:

a) 2×3 b) 2×5 c) 4×5 d) 4×6

Pokud dlaždice použít můžeme, urči, kolik jich budeme potřebovat.

Dlážďíme čtverec 20×20 .

a) dlaždice 2×3

20 není dělitelné $3 \Rightarrow$ čtverec 20×20 nemůžeme vydlážďit dlaždicemi 2×3 .

b) dlaždice 2×5

20 je dělitelné 2 i $5 \Rightarrow$ čtverec 20×20 můžeme vydlážďit dlaždicemi 2×5 .

Počty dlaždic: první směr: $20 : 2 = 10$, druhý směr: $20 : 5 = 4 \Rightarrow$ celkem potřebujeme $10 \cdot 4 = 40$ dlaždic.

Kontrola přes obsah: Obsah čtverce: $20 \cdot 20 = 400$, obsah dlaždice $2 \cdot 5 = 10$, obsah 40 dlaždic: $40 \cdot 10 = 400$.

c) dlaždice 4×5

20 je dělitelné 4 i $5 \Rightarrow$ čtverec 20×20 můžeme vydlážďit dlaždicemi 4×5 .

Počty dlaždic: první směr: $20 : 4 = 5$, druhý směr: $20 : 5 = 4 \Rightarrow$ celkem potřebujeme $5 \cdot 4 = 20$ dlaždic.

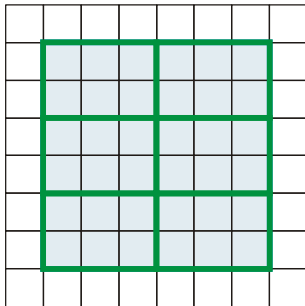
Kontrola přes obsah: Obsah čtverce: $20 \cdot 20 = 400$, obsah dlaždice $4 \cdot 5 = 20$, obsah 20 dlaždic: $20 \cdot 20 = 400$.

d) dlaždice 4×6

20 není dělitelné 6 \Rightarrow čtverec 20×20 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 4×6 .

Př. 5: Obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 2×3 máme vydláždit co nejmenší možný čtverec. Jak dlouhá bude strana čtverce? Kolik dlaždic budeme potřebovat? Nakresli obrázek na čtverečkovaný papír.

Skládáme dlaždice k sobě tak, aby vytvořily čtverec.



Nejmenší čtverec má stranu o délce 6 (jednu stranu složíme ze tří, druhou ze dvou dlaždic), potřebujeme 6 dlaždic.

Hledaná strana čtverce musí být násobkem obou rozměrů dlaždice \Rightarrow hledáme společný násobek obou rozměrů (a to ten nejmenší).

Př. 6: Obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 4×6 máme vydláždit co nejmenší možný čtverec. Jak dlouhá bude strana čtverce? Kolik dlaždic budeme potřebovat?

Strana čtverce musí být násobkem 4 a 6 \Rightarrow nejmenší takové číslo je 12.

Nejmenší dlážděný čtverec bude mít rozměr 12×12 .

Potřebujeme: jeden rozměr $12 : 4 = 3$, druhý rozměr $12 : 6 = 2 \Rightarrow$ potřebujeme $3 \cdot 2 = 6$ dlaždic.

Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $12 \cdot 12 = 144$, obsah dlaždice $4 \cdot 6 = 24$, obsah 6 dlaždic: $6 \cdot 24 = 144$.

Pedagogická poznámka: V předchozích dvou příkladech se u některých žáků zrychleně zopakuje vývoj, kterým jsme prošli u hry Tleskni, dupni. Nejdříve hypotéza o tom, že rozměr čtverce je součinem obou rozměrů dlaždice a poté korekce při příkladu, který tuto hypotézu vyvrací.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu je povolena kalkulačka.

Př. 7: Řeš předchozí příklad pro dlaždice o rozměrech:

a) 4 cm x 8 cm

b) 2,4 m x 3,6 m

c) 0,12 m x 0,16 m

d) 6,4 cm x 9,6 cm

e) 132 cm x 180 cm

Počty dlaždic urči pouze u dvou prvních bodů. Výsledky sepiš do přehledné tabulky.

Hledáme rozměry nejmenšího dlážditelného čtverce \Rightarrow hledáme nejmenší společný násobek rozměrů dlaždice.

a) 4 cm x 8 cm

Nejmenší společný násobek je 8 \Rightarrow potřebujeme dvě dlaždice.

b) 2,4 m x 3,6 m

Rozměry převedeme na dm, abychom se zbavili desetinných čísel \Rightarrow dlaždice 24 x 36.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(24,36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

Hledaný čtverec má rozměry 72 x 72.

Potřebujeme: jeden rozměr $72 : 24 = 3$ dlaždice, druhý rozměr $72 : 36 = 2$ dlaždice, celkem $3 \cdot 2 = 6$ dlaždic.

Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $72 \cdot 72 = 5184$, obsah dlaždice $24 \cdot 36 = 684$, obsah 6 dlaždic: $6 \cdot 684 = 5184$.

c) 0,12 m x 0,16 m

Rozměry převedeme na cm, abychom se zbavili desetinných čísel \Rightarrow dlaždice 12 x 16.

$$12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(12,16) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$.

Hledaný čtverec má rozměry 48 x 48.

Potřebujeme: jeden rozměr $48 : 12 = 4$ dlaždice, druhý rozměr $48 : 16 = 3$ dlaždice, celkem $4 \cdot 3 = 12$ dlaždic.

Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $48 \cdot 48 = 2304$, obsah dlaždice $12 \cdot 16 = 192$, obsah 12 dlaždic: $12 \cdot 192 = 2304$.

d) 6,4 cm x 9,6 cm

Rozměry převedeme na mm, abychom se zbavili desetinných čísel \Rightarrow dlaždice 64 x 96.

$$64 = 8 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$$

$$96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(64,96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 192$.

Hledaný čtverec má rozměry 192 x 192.

Potřebujeme: jeden rozměr $192 : 64 = 3$ dlaždice, druhý rozměr $192 : 96 = 2$ dlaždice, celkem $2 \cdot 3 = 6$ dlaždic.

Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $192 \cdot 192 = 36864$, obsah dlaždice $64 \cdot 96 = 6144$, obsah 6 dlaždic: $6 \cdot 6144 = 36864$.

e) 132 cm x 180 cm

$$132 = 3 \cdot 44 = 3 \cdot 4 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(132,180) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$.

Hledaný čtverec má rozměry 1980 x 1980.

Potřebujeme: jeden rozměr $1980 : 132 = 15$ dlaždice, druhý rozměr $1980 : 180 = 11$ dlaždice, celkem $15 \cdot 11 = 165$ dlaždic.

Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $1980 \cdot 1980 = 3\,920\,400$, obsah dlaždice

$132 \cdot 180 = 23\,760$, obsah 165 dlaždic: $165 \cdot 23\,760 = 3\,920\,400$.

rozměry dlaždice	4 x 8	2, 4 x 3, 6	0,12 x 0,16	6,4 x 9,6	132 x 180
rozměr čtverce	8 x 8	7,2 x 7,2	0,48 x 0,48	19,2 x 19,2	1980 x 1980
počet dlaždic	2	6	12	6	165

Př. 8: Máme obdélník 15 x 12. Rozhodni, které z následujících dlaždic můžeme použít na jeho vydláždění.

a) 2 x 3 b) 2 x 5 c) 4 x 5 d) 4 x 6

Pokud je možné dlaždice použít, urči, kolik jich na dláždění bude potřeba.

Obdélník 15 x 12.

a) 2 x 3

Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.

- 15 je dělitelné 3 ($15 : 3 = 5$)
- 12 je dělitelné 2 ($12 : 2 = 6$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždít $5 \cdot 6 = 30$ dlaždicemi 2 x 3.

b) 2 x 5

Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.

- 15 je dělitelné 5 ($15 : 5 = 3$)
- 12 je dělitelné 2 ($12 : 2 = 6$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždít $3 \cdot 6 = 18$ dlaždicemi 2 x 5.

c) 4 x 5

Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.

- 15 je dělitelné 5 ($15 : 5 = 3$)
- 12 je dělitelné 4 ($12 : 4 = 3$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždít $3 \cdot 3 = 9$ dlaždicemi 4 x 5.

d) 4 x 6

Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.

15 není dělitelné ani 4 ani 6 \Rightarrow obdélník 15 x 12 není možné vydláždít dlaždicemi 4 x 6.

Pedagogická poznámka: Typický první názor nejrychlejších žáků, kteří se k příkladu dostanou je, že žádná z dlaždic nevyhovuje. Dělitelnost kontrolují pouze v pořadí, které je v zadání a vůbec je nenapadne, že si dlaždice mohou libovolně otočit.

Př. 9: Projdi si všechny tři hodiny, ve kterých jsme dláždili a sepiš výsledky, ke kterým jsme dospěli.

Pedagogická poznámka: Řešení posledního příkladu v následující hodině.

Shrnutí: Při dláždění nejmenšího čtverce obdélníkovou dlaždicí hledáme nejmenší společný násobek.