

1.3.7 Dělitelnost dvěma a čtyřmi

Předpoklady: 010306

V minulé hodině jsme objevili znaky dělitelnosti:

- 10: Číslo je dělitelné deseti právě když končí na nulu.
- 5: Číslo je dělitelné deseti právě když končí na nulu.

Př. 1: Důležitou roli při určování dělitelnosti hraje ciferný součet. Odhadni, jak by se měl ciferný součet počítat a urči jej pro následující čísla:

- a) 26 b) 178 c) 9805 d) 10302

Ciferný součet - součet číslic, které tvoří jednotlivé cifry čísla.

a) 26

Ciferný součet: $2 + 6 = 8$.

b) 178

Ciferný součet: $1 + 7 + 8 = 16$.

c) 9805

Ciferný součet: $9 + 8 + 0 + 5 = 22$.

d) 10302

Ciferný součet: $1 + 0 + 3 + 0 + 2 = 6$.

Pedagogická poznámka: Ciferný součet je probrán schválně už v této hodině, aby nebyl při objevování pravidla pro dělitelnost tří tak na očích.

Význam ciferného součtu není vysvětlen schválně, patří mezi pojmy, které jsou samovysvětlující a žáci by se měli učit je dešifrovat samostatně. Pokud neví, nejdřív jim radím, aby se zamysleli, že název je zvolen tak, aby vysvětlil způsob výpočtu. V druhé fázi napíšu na tabuli, že číslo 26 má dvě cifry 2 a 6, pak už ciferný součet vypočítají téměř všichni.

Př. 2: Jak se změní ciferný součet čísla, když změním pořadí jeho cifer?

Protože při změně pořadí cifer čísla neměníme čísla, která v ciferném součtu sčítáme, a velikost součtu na pořadí nezáleží, ciferný součet se nezmění.

Př. 3: Najdi největší a nejmenší trojčiferné číslo s ciferným součtem 9.

O velikosti čísla rozhodují zejména počáteční cifry:

největší číslice je 9 \Rightarrow zbylé cifry se musí rovnat nule \Rightarrow největším trojčiferným číslem s ciferným součtem 9 je číslo 900.

nejmenší číslice je 0, ta však nemůže stát na prvním místě \Rightarrow na první místo postavíme druhou nejmenší 1, na druhé místo 0 a na třetí číslici 8 (aby se ciferný součet rovnal 9) \Rightarrow nejmenším trojčiferným číslem s ciferným součtem 9 je číslo 108.

Př. 4: Najdi znak dělitelnosti dvěma. Zdůvodni jej.

Číslo je dělitelné dvěma, právě když končí na sudou číslici (0; 2; 4; 6 nebo 8).

Můžeme napsat $6824 = 6 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4$, červeně vyznačená čísla (velikosti skupin založené na desítce) jsou určitě dělitelné dvěma \Rightarrow o dělitelnosti čísla rozhoduje číslice na místě jednotek:

- číslo končí na sudou číslici 0, 2, 4, 6, 8 \Rightarrow všechny vytvořené skupiny jsou dělitelné dvěma \Rightarrow číslo je dělitelné dvěma,
- číslo končí na lichou číslici: výsledné číslo je složeno z části dělitelné 2 a části nedělitelné 2 \Rightarrow výsledné číslo není dělitelné 2.

Číslo je dělitelné dvěma, právě když končí na sudou číslici (0; 2; 4; 6 nebo 8).

Př. 5: Najdi nejmenší a největší sudé trojčiferné číslo.

Nejmenší sudé trojčiferné číslo: 100 (nejmenší trojčiferné číslo vůbec).

Největší sudé trojčiferné číslo: 998 (o jedna menší než největší trojčiferné číslo 999).

Př. 6: Kolik čísel můžeme napsat na vyznačené místo, abychom získali čtyřčiferné sudé číslo?

a) $98\boxed{}4$

b) $528\boxed{}$

c) $\boxed{}546$

d) $47\boxed{}3$

a) $98\boxed{}4$

Dělitelnost závisí pouze na poslední číslici (která je v tomto případě sudá) \Rightarrow číslo bude určitě dělitelné dvěma \Rightarrow na předposlední místo můžeme doplnit cokoliv \Rightarrow 10 možností (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

b) $528\boxed{}$

Dělitelnost závisí pouze na poslední číslici, kterou doplňujeme a která má být sudá \Rightarrow 5 možností (0, 2, 4, 6, 8).

c) $\boxed{}546$

Dělitelnost závisí pouze na poslední číslici (která je v tomto případě sudá) \Rightarrow číslo bude určitě dělitelné dvěma \Rightarrow na první místo můžeme doplnit cokoliv \Rightarrow 9 možností (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), protože nemůžeme doplnit nulu, aby číslo bylo čtyřčiferné.

d) $47\boxed{}3$

Dělitelnost závisí pouze na poslední číslici (která je v tomto případě liché) \Rightarrow číslo určitě nebude dělitelné dvěma \Rightarrow 0 možností.

Př. 7: Při hodu kostkou může padnout liché nebo sudé číslo. Jaká čísla (rozlišuj pouze, zda padlo liché nebo sudé číslo, ne jaká hodnota) musí padnout na dvou kostkách, aby byl součet: a) lichý b) sudý?

a) lichý součet

Na jedné kostce musí padnout liché číslo a na druhé sudé.

b) sudý součet

Na obou kostkách musí padnout sudá čísla nebo lichá čísla.

Př. 8: Zkoumej čísla větší než 23 a menší než 32. Je mezi nimi více sudých nebo lichých čísel?

Jde o čísla 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31: čtyři jsou sudá a čtyři lichá \Rightarrow sudých i lichých je stejně.

Př. 9: Číslu 23 v předchozím příkladu říkáme dolní mez, číslu 32 pak horní mez.
a) Změň horní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více sudých než lichých.
b) Změň dolní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více lichých než sudých.
c) Změň horní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více lichých než sudých.
Ve všech bodech najdi nejdříve jedno řešení, poté zkus najít i všechna ostatní.

a) Změň horní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více sudých než lichých.

Pokud horní mez zvětšíme:

- 1 na 33, přibude mezi zkoumanými čísly jedno sudé (číslo 32)
- 2 na 34, přibudou dvě čísla (sudé 32 a liché 33),
- 3 na 35, přibudou tři čísla (dvě sudá 32, 34 a liché 33).

\Rightarrow musíme zvětšit horní mez o 1, 3, 5, 7, ...

Pokud horní mez zmenšíme:

- 1 na 31, ubude mezi zkoumanými čísly jedno liché (číslo 31)
- 2 na 30, ubudou dvě čísla (sudé 30 a liché 31),
- 3 na 29, ubudou tři čísla (dvě lichá 31, 29 a jedno sudé 30).

\Rightarrow musíme zmenšit horní mez o 1, 3, 5, 7 (o více nemůžeme, pak by horní mez nebyla větší než dolní).

b) Změň dolní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více lichých než sudých.

Podobná úvaha jako v předchozím bodu \Rightarrow můžeme:

- zmenšit dolní mez o 1, 3, 5, 7, ...,
- zvětšit dolní mez o 1, 3, 5 nebo 7 (aby nebyla větší než horní).

c) Změň horní mez tak, aby mezi zkoumanými čísly bylo více lichých než sudých.

Změnou horní meze nemůžeme zajistit, aby mezi zkoumanými čísly bylo více lichých než sudých čísel, protože nejmenší číslo ve skupině je sudé, počet lichých čísel se může počtu sudých maximálně rovnat.

Pedagogická poznámka: Slabší žáci se spokojí s tím, že v předchozím příkladě najdou jedno řešení, u lepších žáků se snažím, aby našli řešení všechna.

Př. 10: Jaká čísla (rozlišuj pouze, zda jsou sudá nebo lichá) musíme do zadání příkladu 8 volit za dolní a horní mez, aby mezi zkoumanými čísly bylo:

- a) stejně sudých i lichých čísel,
- b) více sudých než lichých čísel,
- c) více lichých než sudých čísel.

a) stejně sudých i lichých čísel

Musíme volit:

- za horní mez liché číslo (největší číslo ve skupině je pak sudé) a za dolní mez sudé číslo (nejmenší číslo je pak liché)

- za horní mez sudé číslo (největší číslo ve skupině je pak liché) a za dolní mez liché číslo (nejmenší číslo je pak sudé).

b) více sudých než lichých čísel

Volíme za dolní i horní mez liché číslo (pak bude nejmenším i největším zkoumaným číslem sudé číslo a sudých čísel tak bude víc než lichých).

c) více lichých než sudých čísel.

Volíme za dolní i horní mez sud číslo (pak bude nejmenším i největším zkoumaným číslem liché číslo a lichých čísel tak bude víc než sudých).

Shrnutí: Dělitelnost dvěma poznáme podle poslední sudé číslice.