

1.3.7 Dělitelnost čtyřmi

Předpoklady: 010306

Pedagogická poznámka: Látka se za jednu hodinu stihnout nedá, rozdělujeme ji do dvou hodin, druhou polovinu druhé věnujeme písemce.

Př. 1: Ověř dělení, že číslo 114 není dělitelné čtyřmi. Napiš rozvinutý zápis čísla 114 a zdůvodni, proč k jeho dělitelnosti čtyřmi nestačí, že jeho poslední cifra je dělitelná čtyřmi.

$$\begin{array}{r} 114 : 4 = 28 \text{ (zb. 2)} \\ 34 \\ 2 \end{array}$$

$$114 = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

Zbytek po dělení vznikne, když se snažíme rozdělit desítku (desítka není dělitelná čtyřmi), dělitelné čtyřmi jsou pouze větší skupiny (100, 1000, ...).

Číslo je dělitelné čtyřmi, když je čtyřmi dělitelné jeho poslední dvojčíslí.

Př. 2: U následujících čísel rozhodni, zda jsou dělitelná čtyřmi. Rozhodnutí zdůvodni a ověř pomocí kalkulačtoru.

- | | | | |
|---------|---------|---------|----------|
| a) 416 | b) 454 | c) 9732 | d) 4542 |
| e) 9174 | f) 8582 | g) 1114 | h) 90004 |

- a) 416 je dělitelné 4, protože 16 je dělitelné čtyřmi.
- b) 454 není dělitelné 4, protože 54 není dělitelné čtyřmi.
- c) 9732 je dělitelné 4, protože 32 je dělitelné čtyřmi.
- d) 4542 není dělitelné 4, protože 42 není dělitelné čtyřmi.
- e) 9174 není dělitelné 4, protože 74 není dělitelné čtyřmi.
- f) 8582 není dělitelné 4, protože 82 není dělitelné čtyřmi.
- g) 1114 není dělitelné 4, protože 14 není dělitelné čtyřmi.
- h) 90004 je dělitelné 4, protože 4 je dělitelné čtyřmi.

Př. 3: Kolik číslic můžeme napsat na vyznačené místo, abychom získali čtyřciferné číslo dělitelné čtyřmi?

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $12\boxed{}4$ | b) $666\boxed{}$ | c) $\boxed{}716$ | d) $7\boxed{}34$ |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|

a) $12\boxed{}4$

Musíme doplňovat taková čísla, abychom získali dvojčíslí dělitelné 4: 04, 24, 44, 64, 84 \Rightarrow pět možností 0, 2, 4, 6, 8.

b) $666\boxed{}$

Musíme doplňovat taková čísla, abychom získali dvojčíslí dělitelné 4: 60, 64, 68 \Rightarrow tři možnosti 0, 4, 8.

c) $\boxed{}716$

Poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi \Rightarrow na první místo můžeme umístit libovolnou číslici různou od nuly (aby číslo bylo stále čtyřciferné) \Rightarrow 9 možností: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

d) $7\boxed{}34$

Poslední dvojčíslí není dělitelné čtyřmi \Rightarrow nezáleží na tom, kterou číslici napíšeme na třetí pozici, číslo dělitelné čtyřmi nebude \Rightarrow žádná možnost.

Př. 4: Olda dělil čísla čtyřmi a objevil zajímavou věc. $51 : 4 = 12$ (zb.3), $151 : 4 = 37$ (zb.3), $251 : 4 = 62$ (zb.3), $351 : 4 = 87$ (zb.3), ... Platí tato zákonitost i dále? Proč? Platí podobné pravidlo i pro dělení jiných čísel čtyřmi?

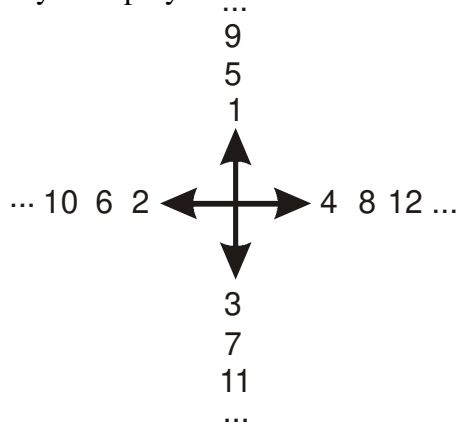
$$451 : 4 = 112 \text{ (zb.3)}$$

Zkusíme další číslo $\begin{matrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{matrix}$ \Rightarrow pravidlo platí zřejmě i pro další čísla.

Proč? Všechna čísla mají stejné poslední dvojčíslí, liší se v počtu stovek \Rightarrow můžeme je psát: $151 = 100 + 51$, $251 = 200 + 51$, $351 = 300 + 51$, $451 = 400 + 51$, červené části jsou dělitelné čtyřmi a nezůstane po nich žádný zbytek \Rightarrow zbytek po dělení vzniká pouze dělením čísla 51 (části, která se u všech čísel opakuje) a která tedy musí být všude stejná \Rightarrow všechna čísla, která končí na dvojčíslí 51, dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek. Stejně pravidlo platí pro dělení všech čísel \Rightarrow při dělení čtyřmi dávají čísla se stejným konečným dvojčíslím stejný zbytek.

Pedagogická poznámka: Část žáků vezme tvrzení jako fakt i bez nějakého rozmyšlení, proto se v lavicích ptám, proč. Neprůstředná formulace se samozřejmě očekávat nedá, ta je společným dílem při kontrole.

Čtyři skupiny čísel.



Př. 5: Do které ze skupin (pravá, levá, horní a dolní čísla) ve schématu čtyř stran patří čísla: 11, 25, 47, 90, 152, 944, 1333, 5682? Zadaná čísla se postupně zvyšují, proto by ses měl snažit o nalezení postupu, který Ti umožní roztřídit čísla do skupin bez postupného přidávání dalších čísel do schématu (které bys měl použít jenom pro kontrolu u nejmenších zadaných čísel).

Pravou skupinu tvoří čísla dělitelná čtyřmi \Rightarrow zadané číslo vydělíme čtyřmi a pak poznáme, kam jej máme napsat.

- $11 : 4 = 2$ (zb.3) neblíží předchozí násobek 4 je 8, pak se ve schématu posuneme o tři skupiny \Rightarrow 11 je dolní číslo.
- $25 : 4 = 6$ (zb.1) neblíží předchozí násobek 4 je 24, pak se ve schématu posuneme o jednu skupinu \Rightarrow 25 je horní číslo.
- $47 : 4 = 11$ (zb.3) neblíží předchozí násobek 4 je 44, pak se ve schématu posuneme o tři skupiny \Rightarrow 47 je dolní číslo.
- $90 : 4 = 22$ (zb.2) neblíží předchozí násobek 4 je 90, pak se ve schématu posuneme o dvě skupiny \Rightarrow 90 je levé číslo.

Z předchozího vidíme, že jednotlivé skupiny ve schématu sdružují čísla se stejným zbytkem po dělení 4:

- Pravá čísla: čísla dělitelná čtyřmi (se zbytkem 0).
- Horní čísla: čísla, která po dělení čtyřmi dávají zbytek 1.
- Levá čísla: čísla, která po dělení čtyřmi dávají zbytek 2.
- Dolní čísla: čísla, která po dělení čtyřmi dávají zbytek 3.

Nyní můžeme rychleji roztřídit čísla do skupin podle zbytku, který získáme při dělení čtyřmi.

$$152 : 4 = 38$$

- $\begin{array}{r} 32 \\ 0 \end{array} \Rightarrow 152$ je pravé číslo,

$$944 : 4 = 236$$

- $\begin{array}{r} 14 \\ 24 \end{array} \Rightarrow 944$ je pravé číslo,

$$1333 : 4 = 333 \text{ (zb.1)}$$

- $\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 1333$ je horní číslo,

$$5682 : 4 = 1420 \text{ (zb.2)}$$

- $\begin{array}{r} 16 \\ 8 \\ 2 \end{array} \Rightarrow 5682$ je dolní číslo.

Pedagogická poznámka: Různí žáci si všimnou významu zbytku pro rozdělení do skupin v různém okamžiku, Ti nejpomalejší se ho dozví až při kontrole. Já pomáhám maximálně se tříděním, které je použito při řešení prvních čtyř čísel.

Př. 6: Do skupiny označované jako 4_0 patří čísla, která při dělení 4 dávají zbytek 0, do skupiny 4_1 čísla, která při dělení 4 dávají zbytek 1, do skupiny 4_2 čísla, která při dělení 4 dávají zbytek 2. Jakou vlastnosti mají čísla, která patří do skupiny 4_3 ? Existuje také skupina 4_4 ? Roztříd' do uvedených skupin čísla: 8, 11, 31, 94, 151.

- $8 : 4 = 2 \Rightarrow 8$ patří do skupiny 4_0 ,
- $11 : 4 = 2$ (zb.3) $\Rightarrow 11$ patří do skupiny 4_3 ,
- $31 : 4 = 7$ (zb.3) $\Rightarrow 31$ patří do skupiny 4_3 ,
- $94 : 4 = 23$ (zb.2)
 $\begin{array}{r} 14 \\ 2 \end{array} \Rightarrow 94$ patří do skupiny 4_2 ,

$$151 : 4 = 37 \text{ (zb.3)}$$

- $\begin{matrix} 15 \\ 31 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow 8 \text{ patří do skupiny } 4_3.$

Pedagogická poznámka: Největším problémem předchozího příkladu je označení skupin pomocí čísla s indexem. Vysvětluji, že nejde o nic jiného než označení skupin žáků ve škole číslem třídy, protože druhým znakem je opět číslo, píšeme ho menší, aby bylo na první pohled jasné, že má jiný význam než první číslo 4.

Př. 7: Najdi všechna čísla větší než 120 a menší než 130, která patří do skupiny 4_1 .

Číslo 120 je dělitelné čtyřmi \Rightarrow dává zbytek 0 \Rightarrow číslo 121 je o jedna větší a při dělení čtyřmi bude dávat zbytek 1 a patří do skupiny 4_1 , další číslo patřící do skupiny 4_1 bude o 4 větší (tedy 125).

Hledaná čísla jsou 121, 125, 129.

Př. 8: Charakterizuj skupinu čísel 3_1 . Kolik skupin $3_{\text{něco}}$ můžeme vytvořit? Vypiš jejich označení.

Do skupiny 3_1 tvoří čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1.

Můžeme vytvořit tři skupiny podle zbytků dělení třemi:

- 3_0 : čísla dělitelná třemi (čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 0),
- 3_1 : čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1,
- 3_2 : čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 2,

Př. 9: Zjisti (aniž bys dělil) zbytek, který získáme po dělení čísla 152 785 651 945 čtyřmi.

Zbytek po dělení čtyřmi je určen posledním dvojčíslem $45 : 4 = 11 \text{ (zb.1)}$ \Rightarrow při dělení čísla 152 785 651 945 čtyřmi získáme zbytek 1.

Př. 10: Dělitelnost podle posledního číslice určujeme pro tři čísla: 2, 5 a 10. Pokus se najít další čísla jejichž dělitelnost můžeme jako u čísla 4 určovat podle dělitelnosti posledního dvojčíslí.

Shrnutí: Číslo je dělitelné čtyřmi, právě když je čtyřmi dělitelné jeho poslední dvojčíslí (protože skupiny 100, 1000, 10000, ... jsou dělitelné čtyřmi).