1.3.9 Dělitelnost třemi

Předpoklady: 010308

Pedagogická poznámka: U prvního příkladu je třeba upozornit, na tom, že řešení si všichni napíšou pouze do sešitu a nikdo nebude své nápady prozrazovat ostatním. Kontrola zápisů v lavicích umožní najít ty, kteří pravidlo znají a separovat je na další část hodiny od ostatních. Pokud se v některém sešitě objeví spojitost s ciferným součtem (který byl zmíněn několik hodin nazpátek) je třeba dávat pozor a utlumit případné informace ke zbytku třídy (účast v diskusích).

Pedagogická poznámka: Po společné kontrole prvního příkladu si napíšeme seznam násobků a někdo si určitě všimne postřehu s prohazováním čísel. To nás navede k vyzkoušení na trojciferných číslech (jak dělitelnost tak nedělitelnosti) postupuje každý sám, podle svých schopností. Pomalejší žáky je možné posílat na další příklady s tím, že toho neprozkoumají tolik jako Ti rychlejší. Nejpozději pět minut před koncem je třeba začít kontrolovat příklad 5 a přejít k závěrečnému diskusi, ze které vyplyne pravidlo pro dělitelnost třemi. Každopádně je třeba k řešení dojít, jinak má část žáků pocit, že hodina byla zbytečná.

Poslední příklad z minulé hodiny: Hledáme další čísla, jejichž dělitelnost poznáme z posledního dvojčíslí: Toto pravidlo bude platit pro všechna čísla, kterými jsou dělitelná čísla 100, 1000, 10000 $\Rightarrow$ podle posledního dvojčíslí můžeme určit dělitelnost 4, 20, 25, 50, 100.

Známe zatím tři druhy znaků dělitelnosti:

- podle poslední číslice (dělitelnost 2, 5, 10),
- podle posledního dvojčíslí (dělitelnost 4, 25, 20, 50, 100),

Př. 1: Zkus navrhnout znak dělitelnosti třemi. Svůj návrh ověř.

Poslední číslo je sudé: Určitě nesprávné, protože například $4:3=1(zb.1)$.

Číslo končí na násobek tří: Určitě nesprávné, protože například $13:3=4(zb.1)$.

Poslední dvojčíslí je dělitelné třemi: Určitě nesprávné, protože například $103:3=34(zb.1)$.

Všechny cifry jsou dělitelné třemi: Určitě nesprávné, protože například $12:3=4$ (ani jedna cifra není dělitelná třemi, přesto číslo celé dělitelné je).

Poslední trojčíslí je dělitelné třemi: Určitě nesprávné, protože například $1003:3=334(zb.1)$.

Pedagogická poznámka: Většina návrhů se snaží napodobit předchozí pravidla (a jsou tedy evidentně nesprávné, často postavené na zobecnění jediného případu), smyslem příkladu je tedy hlavně vyvracení nesprávných hypotéz.
Uvedené hypotézy jsou příklady z hodiny.

Zdá se, že pravidlo pro dělitelnost třemi bude vypadat úplně jinak než ostatní pravidla.

Co jsme mohli udělat ihned?
Vypsat si nejmenší násobky tří a kontrolovat návrhy na nich.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, ...

Pokud najdeme pravidlo pro dělitelnost třemi, bude muset platit pro všechny vypsané násobky tří.

Zajímavý postřeh
Nepodařilo se najít dvojciferné číslo dělitelné třemi, které by po prohození cifer dělitelné třemi nebylo. Například $27:3=9$ a $72:3=24$ nebo $45:3=15$ a $54:3=18$, stejný výsledek jsme získali u všech ostatních čísel $\Rightarrow$ zdá se, že u dvojciferných čísel nezávisí dělitelnost třemi na pořadí cifer v čísle, když cifry v zápisu prohodíme, dělitelnost čísla třemi se nezmění.

Př. 2: Zvol libovolné trojciferné číslo, které neobsahuje nuly a je dělitelné třemi. Kolika způsoby můžeme přemístit cifry a získat tak nové číslo? Kolik z takto získaných čísel je dělitelných třemi?

Vezmeme například číslo 321.
- $321:3=107$
- $312:3=104$
- $213:3=71$
- $231:7=77$
- $123:3=41$
- $132:3=44$

Pokud promícháme cifry trojciferného čísla dělitelného třemi, zůstane dělitelné třemi.

Pedagogická poznámka: V zadání by mělo být spíše „libovolné trojciferné číslo s různými ciframi, které neobsahuje nuly a je dělitelné třemi“, ale myslím, že je dobré ho nechat schválně takto, aby vychcánkové, kteří schválně zvolí číslo se třemi stejnými ciframi, měli dobrý pocit a mohl jsem jim pak sdělit, že sice ušetřili práci, ale nic nezjistili.
Závěr předchozího i následujícího příkladu je velmi přesvědčivý, protože celá třída zkouší dohromady velké množství čísel.

Př. 3: Zvol libovolné trojciferné číslo, které neobsahuje nuly a není dělitelné třemi. Kolika způsoby můžeme přemístit cifry a získat tak nové číslo? Kolik z takto získaných čísel je dělitelných třemi?

Vezmeme například číslo 712.
- $745:3=28(zb.1)$
- $754:3=251(zb.1)$
- $574:3=191(zb.1)$
- $547:3=182(zb.1)$
- $475:3=158(zb.1)$
- $457:3=152(zb.1)$

Pokud promícháme cifry trojciferného čísla, které není dělitelné třemi, získáme číslo, které není dělitelné třemi.

Z předchozích příkladů vyplývá, že dělitelnost třemi závisí pouze na cifrách, ze kterých číslo sestaveno, a nezávisí na tom, v jakém pořadí číslo tvoří.

Př. 4: Vyděl třemi postupně čísla: 10, 100, 1000, 10000 a sleduj, jak se mění zbytek po dělení. Jak se výsledek změní, když jako první cifru napíšeme 2, 3, 4 …?

Zkoušíme: $\begin{array}{l}10:3=3(zb.1)\\ \ 1\end{array}$, $\begin{array}{l}100:3=33(zb.1)\\ \ 10\\ \ \ 1\end{array}$, $\begin{array}{l}1000:3=333(zb.1)\\ \ 10\\ \ \ 10\\ \ \ \ 1\end{array}$, $\begin{array}{l}10000:3=3333(zb.1)\\ \ 10\\ \ \ 10\\ \ \ \ 10\\ \ \ \ \ 1\end{array}$

Zkoušíme: $\begin{array}{l}20:3=6(zb.2)\\ \ 2\end{array}$, $\begin{array}{l}200:3=66(zb.2)\\ \ 20\\ \ \ 2\end{array}$, $\begin{array}{l}2000:3=666(zb.2)\\ \ 20\\ \ \ 20\\ \ \ \ 2\end{array}$, $\begin{array}{l}20000:3=6666(zb.2)\\ \ 20\\ \ \ 20\\ \ \ \ 20\\ \ \ \ \ 2\end{array}$

Zkoušíme: $\begin{array}{l}40:3=13(zb.1)\\ 10\\ \ 1\end{array}$, $\begin{array}{l}400:3=133(zb.1)\\ 10\\ \ 10\\ \ \ 1\end{array}$, ...

$\Rightarrow$ zbytek, který při dělení třemi získáme nezávisí na tom, na které cifře číslice stojí (je stejný na desítkách, stovkách, tisících, ...).
Výsledek tohoto příkladu odpovídá výsledkům příkladů 2 a 3.

Př. 5: Které číslice můžeme přidat k uvedené číslici, abychom získali dvojciferné číslo dělitelné třemi?
a) 1 b) 5 c) 9

a) 1
Z jedničky získáme zbytek 1 $\Rightarrow$ potřebujeme čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 2 $\Rightarrow$ k číslu 1 můžeme přiřadit čísla 2, 5, 8.

b) 5
Při dělení 5 získáme zbytek 2 $\Rightarrow$ potřebujeme čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 1 $\Rightarrow$ k číslu 5 můžeme přiřadit čísla 1, 4, 7.

c) 9
Při dělení 9 získáme zbytek 0 $\Rightarrow$ potřebujeme čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 0 $\Rightarrow$ k číslu 9 můžeme přiřadit čísla 0, 3, 6.

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu žáci fakticky používají ciferný součet, ale jen velmi vzácně si na něj někdo vzpomene. V každém případě, u těch kteří pětku vyřeší, není prozrazení pravidla na závadu, protože ho již fakticky znají.

Př. 6: Které číslice můžeme přidat na vyznačené místo, abychom získali číslo dělitelné třemi? a) $14\square$ b) $42\square7$ c) $9\square42$

a) $14\square$
Čísla 1 a 4 dají dohromady zbytek 2 $\Rightarrow$ hledáme čísla, která dají zbytek 1 $\Rightarrow$ na volné místo můžeme doplnit čísl a 1, 4, 7.

b) $42\square7$

Čísla 4, 2 a 7 dají dohromady zbytek 1 $\Rightarrow$ hledáme čísla, která dají zbytek 2 $\Rightarrow$ na volné místo můžeme doplnit čísl a 2, 5, 8.

c) $9\square42$

Čísla 9, 4 a 2 dají dohromady zbytek 0 $\Rightarrow$ hledáme čísla, která dají zbytek 0 $\Rightarrow$ na volné místo můžeme doplnit čísl a 0, 3, 6 a 9.

Př. 7: Hledej, která z vlastností čísla se nemění, když prohazujeme pořadí jeho cifer? Zformuluj pravidlo pro dělitelnost třemi.

Při prohazování cifer se nemění ciferný součet. Aby bylo číslo dělitelné třemi, musí jednotlivá čísla dát při dělení třemi nulový zbytek (jejich ciferný součet je dělitelný třemi).

Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.

Shrnutí: Dělitelnost třemi nesouvisí s umístěním cifer, ale s jejich ciferným součtem.