

1.3.13 Hledání prvočísel

Předpoklady: 010312

Př. 1: Postup, který jsme pro vyhledání všech prvočísel použili, se nazývá podle starořeckého matematika Eratosthenovo síto. Sestav postup, jak pomocí Eratosthenova síta najít všechna prvočísla menší než libovolné velké zvolené číslo (v našem případě jsme hledali všechna prvočísla menší než 100).

Nejdříve se objeví návrhy podobné následujícímu.

1. Vypíšeme si všechna přirozená čísla menší než zvolené číslo (čísla, mezi kterými máme prvočísla najít).
2. Vyškrtneme všechny násobky dvojky (kromě dvojky samotné).
3. Vyškrtneme všechny násobky trojky (kromě trojky samotné).
4. Vyškrtneme všechny násobky pětky (kromě pětky samotné).
5. Vyškrtneme všechny násobky sedmi (kromě sedmičky samotné).
6. Postupně procházíme další čísla od nejmenšího a jakmile narazíme na nepřeskrtnuté číslo, vyškrtneme všechny jeho násobky (kromě něj).
7. Nepřeskrtnutá čísla (kromě jedničky) jsou prvočísla.

Obecný postup

1. Vypíšeme si všechna přirozená čísla menší než zvolené číslo (čísla, mezi kterými máme prvočísla najít).
2. Jedničku vynecháme.
3. Postupně vypsaná čísla procházíme podle velikosti od nejmenšího. Pokud číslo není přeskrtnuté, jde o prvočísla. Vyškrtneme všechny jeho násobky, kromě jeho samotného. Pokud je číslo přeskrtnuté, nic neděláme a pokračujeme dále.

Pedagogická poznámka: Postup sestaví žáci na třech úrovních:

jen konkrétně pro vyškrťování násobků 2, 3, 5, 7,
poloobecně tak, jak je uvedeno v řešení,

obecně (žáci si uvědomí, že bod 6 pokrývá i všechno předchozí škrtnání).

Při kontrole se snažíme diskutovat dojíti k tomu, aby obecné řešení přijali pokud možno všichni. Vznáším požadavek, aby postup neobsahoval určení žádného jiného konkrétního čísla než jedničky.

Takto jsme hledali množinu všech dělitelů čísla 36.

$$36:1=36 \Rightarrow 1,36$$

$$36:2=18 \Rightarrow 2,18$$

$$36:3=12 \Rightarrow 3,12$$

$$36:4=9 \Rightarrow 4,9$$

$$36:5 = \text{se zbytkem}$$

$$36:6=6 \Rightarrow \text{našli jsme číslo dvakrát} \Rightarrow \text{dál nehledáme.}$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Pokud se nám podaří vydělit beze zbytku, najdeme dva dělitele (menšího a většího) nebo jeden dělitel dvakrát.

Př. 2: Jirka zjišťoval pomocí kalkulačky, zda jsou některá čísla prvočísla. Takto zapsal své výpočty do sešitu. Je jeho postup nejúspěšnější možný? Kdy už bylo jasné, že nalezená prvočísla nemají žádného dalšího dělitele?

173	2, 3, 5	353	2, 3, 5
$173 : 7 = 24,7\dots$		$353 : 7 = 50,4\dots$	
$173 : 11 = 15,7\dots$		$353 : 11 = 32,09\dots$	
$173 : 13 = 13,3\dots$	161	$353 : 13 = 27,1\dots$	
$173 : 17 = 10,1\dots$	2, 3, 5	$353 : 17 = 20,7\dots$	
$173 : 19 = 9,1\dots$	$161 : 7 = 23$	$353 : 19 = 18,5\dots$	
$173 : 23 = 7,5\dots$		$353 : 23 = 15,3\dots$	
$173 : 29 = 5,9\dots$		$353 : 29 = 12,1\dots$	
173 je prvočíslo.	161 není prvočíslo.	353 je prvočíslo.	

U čísla 173 jsme mohli zastavit po vydělení 17, u čísla 353 po vydělením číslem 19. V obou případech vyšel podíl menší než dělenec a je zřejmé, že pro žádné další větší prvočíslo bychom nezískali podíl větší (žádné další prvočíslo by nemohlo hrát roli menšího čísla v nalezeném součinu).

Pedagogická poznámka: Nalezení místa, kde je třeba při dělení skončit, je značný problém. Nejsem si jistý, zda předchozí postup splní svůj účel, jde o můj poslední nápad, jak připravit pro žáky schůdnou cestu.

Př. 3: Sestav postup, jak o libovolném čísle co nejrychleji zjistit, zda je prvočíslem.

Zadané číslo postupně dělíme čím dál většími prvočíslly.

Pokud je číslo některým prvočíslem dělitelné, není prvočíslem.

Dělení zastavíme, když vydělíme prvočíslem, u něhož je podíl menší než prvočíslo, kterým jsme dělili.

Př. 4: Vysvětli, proč jsme při vyškrtávání tabulky nemuseli vyškrtávat násobky čísel větších než sedm.

$100 : 11 = 9$
 $\quad \quad \quad 1 \Rightarrow$ při dělení prvočíslem, které je větší než 7 už vychází číslo menší než 10 \Rightarrow všechna složená čísla menší než 100 mají alespoň jednoho dělitele menšího než 10 a tudíž jsme je během vyškrtávání násobků 2, 3, 5, 7 vyškrtali.

Př. 5: Najdi mezi zadanými čísly prvočísla. Použij kalkulačku.

- a) 551 b) 681 c) 733 d) 961

a) 551

Postupně dělíme čísly: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$551 : 19 = 29 \Rightarrow$ číslo 551 není prvočíslo.

b) 681

Ihned vidíme, že číslo 681 je dělitelné třemi (ciferný součet 15) \Rightarrow číslo 551 není prvočíslo.

c) 733

Postupně dělíme čísly: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

$733 : 29 = 25,27\dots \Rightarrow$ nemá smysl dělit většími prvočísly (podíl vychází menší než dělitel, přešli jsme přes tvar, který se nejvíce podobal čtverci) \Rightarrow číslo 733 je prvočíslo.

d) 961

Postupně dělíme čísly: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$961 : 31 = 31 \Rightarrow$ číslo 961 není prvočíslo.

Př. 6: Najdi největší prvočíslo, které je menší než:

a) 10000

b) 1 000 000

Co budeš k takovému hledání potřebovat?

V obou případech budeme potřebovat seznam prvočísel.

a) Největší prvočíslo menší než 10 000

Potřebujeme seznam prvočísel menších než 100 (máme z příkladu 2 z minulé hodiny).

Největší číslo menší než 10000: 9999 dělitelné třemi, zkusíme další postupně menší lichá čísla (sudá jsou jasně dělitelná)

9997: dělíme čísly 5, 7, 11, 13 $\Rightarrow 9997 : 13 = 769$

9995: dělitelné 5

9993: dělitelné 3

9991: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 $\Rightarrow 9991 : 97 = 103$

9989: dělíme čísly 7 $\Rightarrow 9989 : 7 = 1427$

9987: dělitelné 3

9985: dělitelné 5

9983: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 \Rightarrow

$9983 : 67 = 149$

9981: dělitelné 3

9979: dělíme čísly 7, 11, 13, 17 $\Rightarrow 9979 : 17 = 587$

9977: dělíme čísly 7, 11 $\Rightarrow 9977 : 11 = 907$

9975: dělitelné 5

9973: dělíme čísly 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \Rightarrow žádným z uvedených čísel není číslo 9973 dělitelné \Rightarrow číslo 9973 je největší prvočíslo menší než 10 000.

b) Největší prvočíslo menší než 1000000

Potřebujeme seznam prvočísel menších než 1000.

Postupujeme stejně, hledaným číslem je číslo 999983.

Shrnutí: Dělitele vždy najdeme ve dvojicích.