

1.3.14 Prvočíselný rozklad

Předpoklady: 010312

Př. 1: Do kolika skupin dělíme přirozená čísla podle počtu dělitelů?

Podle počtu dělitelů rozdělujeme přirozená čísla do tří skupin:

- číslo 1 (má jediného dělitele - samo sebe),
- prvočísla (mají právě dva dělitele - jedničku a samo sebe),
- složená čísla (mají více než dva dělitele).

Prvočísla jsme se již zabývali, podíváme se teď na čísla složená.

Jak je například složené číslo 12?

Například $12 = 6 \cdot 2$. Číslo 2 je prvočíslo a není tedy složené, číslo 6 je složené a můžeme jej rozkládat dál: $12 = 6 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2$. Teď jsme vyjádřili číslo 12 jako součin prvočísel (čísel, která se nedají dále rozkládat). Získali jsme **prvočíselný rozklad** složeného čísla.

Př. 2: Na co bychom se nyní měli zaměřit, pokud chceme s prvočíselným rozkladem dále pracovat?

Číslo 12 se dá rozložit i jiným způsobem než $12 = 6 \cdot 2$. Získáme tak stejný rozklad?

$$12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Zdá se, že na tom, jakým způsobem číslo rozkládáme, nezáleží.

Př. 3: Rozlož na součin prvočísel číslo 60.

$$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60 = 3 \cdot 20 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60 = 4 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Různými způsoby jsme došli ke stejnému výsledku. Na matfyzu si pak dokážeme, že prvočíselný rozklad libovolného složeného čísla nezáleží na tom, jaký postup zvolíme.

Př. 4: Najdi prvočíselný rozklad čísel 24, 28, 32, 54.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$32 = 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

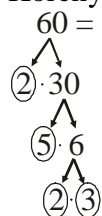
Pedagogická poznámka: Největším problémem při rozkladu v řádce je opisování již získaných prvočísel. Opět je třeba upozorňovat, že některá znaménka = pak neplatí.

K zřehlednění a usnadnění rozkladu větších čísel existuje mnoho druhů zápisů. Prohlédni si některé.

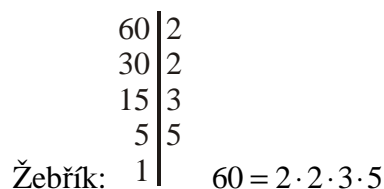
Rozklad v řádce: $60 = 4 \cdot 15 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$

Postupné dělení: $60 : \underline{2} = 30$
 $30 : \underline{2} = 15$
 $15 : \underline{3} = 5$
 $60 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$

Kořeny (nebo také stromeček, vodopád):



$$60 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$$



$$\text{Žebřík: } 60 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Př. 5: Najdi prvočíselné rozklady následujících čísel. Zkus použít všechny uvedené zápisy na jednodušších příkladech a pak si vyber ten, který Ti přijde nejvhodnější.

36 80 99 108 126 180 224 342 448 576 732

$$36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$108 = 4 \cdot 27 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$126 = 3 \cdot 42 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$224 = 2 \cdot 112 = 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$342 = 3 \cdot 114 = 3 \cdot 2 \cdot 57 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$$

$$448 = 4 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$576 = 2 \cdot 288 = 2 \cdot 4 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$732 = 4 \cdot 183 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 61$$

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou, která se vyskytuje ve všech uvedených postupech je neuvedení konečného výsledku (žák provede celý postup, ale nenapíše $60 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$, není tedy jasné jaká čísla získal. Tato chyba souvisí i s tím, zda má žák vůbec správnou (či zda nějakou) představu o tom, k čemu má vlastně dospět. Nejproblematictější postupem je žebřík, žáci často neprovedou poslední dělení (přijde jim zbytečně dělit ještě i pětku pětkou), čímž ztratí poslední číslo v rozkladu. Někteří sami objeví problém, když jim dojde, že při jejich postupu záleží na tom, jak číslo rozkládají (podle toho, jak rozkládají, vynechají poslední číslo).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro žáky, kteří mají problémy s příkladem 5 v hodině jako domácí cvičení.

Př. 6: Najdi prvočíselné rozklady následujících čísel. Zkus použít všechny uvedené zápisy a pak si vyber ten, který Ti přijde nejvhodnější.

48 88 98 116 171 216 264 368 756

$$48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$88 = 8 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^3 \cdot 11$$

$$98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 7^2$$

$$116 = 4 \cdot 29 = 2 \cdot 2 \cdot 29 = 2^2 \cdot 29$$

$$171 = 3 \cdot 57 = 3 \cdot 3 \cdot 19$$

$$216 = 4 \cdot 58 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 29 = 2^3 \cdot 29$$

$$264 = 4 \cdot 66 = 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$368 = 4 \cdot 92 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 = 2^4 \cdot 23$$

$$756 = 4 \cdot 189 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

Shrnutí: Složená čísla můžeme postupným dělením jednoznačně rozložit na součin prvočísel.