

1.3.15 Mocniny

Předpoklady: 010314

Př. 1: Najdi prvočíselný rozklad následujících čísel.

45 88 104 189

$$45 = 5 \cdot 9 = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$88 = 8 \cdot 11 = 2 \cdot 4 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$$

$$104 = 4 \cdot 26 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

$$189 = 9 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Výsledky včerejšího příkladu číslo 5:

$$36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$108 = 4 \cdot 27 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$126 = 3 \cdot 42 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$224 = 2 \cdot 112 = 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$342 = 3 \cdot 114 = 3 \cdot 2 \cdot 57 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$$

$$448 = 4 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$576 = 2 \cdot 288 = 2 \cdot 4 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$732 = 4 \cdot 183 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 61$$

Pedagogická poznámka: Následující zavedení mocnin není v žádném případě počátkem systematického výkladu. Jde jen o využití evidentních problémů s čitelností některých zápisů (na které žáci poukazují spontánně sami). Následující příklady jim nečiní žádné problémy a myslím, že přispívají k tomu, aby brali mocniny jako něco užitečného a ne jako z venku vnucenou komplikaci.

Pedagogická poznámka: Připomenutí mocnin má určitě význam i kvůli zavedení násobení jako ušetření opakovaného sčítání. Většina žáků o tom nikdy ani neslyšela a bohužel ani nepřemýšlela.

Zápis výsledků není příliš přehledný. Vyskytuje se v nich příliš mnoho stejných čísel (nejčastěji dvojek) \Rightarrow snaha najít úspornější zápis pro opakované násobení stejným číslem (podobně jako se nám podařilo násobením úsporněji zapsat opakované sčítání stejných čísel $3+3+3+3+3+3+3=7 \cdot 3=21$).

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ násobíme pětkrát dvojkou \Rightarrow k zápisu by měly stačit pouze dvě čísla:

- co násobíme (2)
- kolikrát (5)

\Rightarrow možností je mnoho, vybrána byla následující $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (číslo, které opakovaně násobíme píšeme normálně, číslo, které udává počet násobení píšeme jako horní index).

Uvedenému zápisu 2^5 říkáme **pátá mocnina dvou**.

Př. 2: Zapiš jako mocniny následující součiny.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $7 \cdot 7$ c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ d) $5 \cdot 5 \cdot 5$ e) 11

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ b) $7 \cdot 7 = 7^2$ c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$
d) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ e) $11 = 11^1$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci mají problém s bodem e). Je třeba podotknout, že by měli umět napsat i takovouto mocninu, ale samotný zápis je ze selského pohledu nesmyslný, protože nic nešetří, ale naopak přiděluje práci.

Pedagogická poznámka: Výsledky příkladů z minulé hodiny si žáci určitě neopisují znova, zápis s mocninami dopisují k už napsaným výsledkům minulé hodiny.

Př. 3: Zapiš výsledky příkladu 4 pomocí mocnin.

$$36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5$$

$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 3^2 \cdot 11$$

$$108 = 4 \cdot 27 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$126 = 3 \cdot 42 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$224 = 2 \cdot 112 = 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^5 \cdot 7$$

$$342 = 3 \cdot 114 = 3 \cdot 2 \cdot 57 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$$

$$448 = 4 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^6 \cdot 7$$

$$576 = 2 \cdot 288 = 2 \cdot 4 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^2$$

$$732 = 4 \cdot 183 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 61 = 2^2 \cdot 3 \cdot 61$$

Př. 4: Napiš co znamenají následující mocniny.

a) 2^3 b) 3^2 c) 4^7

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $3^2 = 3 \cdot 3$

c) $4^7 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

K čemu je dobrý prvočíselný rozklad? Například v něm můžeme najít všechny dělitele čísla.

Př. 5: Urči prvočíselný rozklad čísla 24 a najdi v něm všechny jeho dělitele.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Dělitelé 2 a 3 jsou vidět přímo v rozkladu.

$4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow$ ostatní dělitele můžeme snadno získat vynásobením částí prvočíselného rozkladu.

Množinu všech dělitelů čísla získáme vynásobením všech různých částí prvočíselného rozkladu.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není pro žáky samozřejmý a může jim hodně pomoci při hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

Vrátíme se na chvílku k vyškrtávací tabulce.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75
76	77	78	79	80
81	82	83	84	85
86	87	88	89	90
91	92	93	94	95
96	97	98	99	100

Př. 6: Která čísla jsou v tabulce přeškrtnuta:

a) červeně  a zeleně 

b) červeně  a fialově 

c) modře  a fialově  ?

Jakou vlastnost mají čísla v každém z bodů?

a) červeně  a zeleně 

Vyškrtnutá jsou čísla 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 a 100 (jde o násobky 10, tedy čísla, která jsou násobky 2 a 5 najednou).

b) červeně  a fialově 

Vyškrtnutá jsou čísla 14, 28, 42, 56, 70, 84 a 98 (jde o násobky 14, tedy čísla, která jsou násobky 2 a 7 najednou).

c) modře  a fialově 

Vyškrtnutá jsou čísla 21, 42, 63 a 84 (jde o násobky 21, tedy čísla, která jsou násobky 3 a 7 najednou).

Hra Tleskni, dupni

Čtyři role:

- Hlasatel ve dvou sekundových intervalech postupně hlásí čísla 0, 1, 2, 3.
- Tleskač na každé druhé číslo tleskne.
- Dupač na každé třetí číslo dupne.
- Hlídač hlídá, zda někdo nepodvádí.

Jak dlouho vydrží tleskač (dupač) tleskat (dupat) bez chyby?

Pedagogická poznámka: Hrát může celá třída. Čísla odříkává učitel, dvě lavice za sebou tvoří základní hrací jednotku. V jedné lavici jsou stojící hráči (například na straně u okna tleskačí, na straně u dveří dupači), žáci v druhé lavici je hlídají (každý svého kamaráda na stejném místě). Ti, kteří se spletou a sednou si do lavice. Tak je vidět, jak postupně hráči, sedící pak mají více času sledovat celkové dění a tedy i to, kdy se tleskači a dupači potkávají.

Př. 7: Při hře Tleskni, dupni vydržela nejdéle Ája a Frantou. Oba se spletli v 78 sekundě, kdy Franta nic neudělal. Kdo z nich byl tleskač a kdo dupač? Kolikrát provedl svůj úkon během hry Franta. Kolikrát Ája?

78 sekunda \Rightarrow právě bylo říkáno číslo $78:2=39$.

- 39 je násobek 3 \Rightarrow dupač měl dupnout, Franta se spletl, když nic neudělal \Rightarrow Franta byl dupač. $39:3=13$, naposledy zapomněl \Rightarrow během hry 12 krát dupnul.
- 39 není násobek 2 \Rightarrow tleskač neměl nic dělat, Ája se spletla \Rightarrow Ája tleskla. $38:2=19 \Rightarrow$ Ája tleskal během hry 20 krát.

Př. 8: Hra Tleskni, dupni se hraje podruhé. Ani po 60 sekundách se nikdo nespletl. Kolikrát tleskl každý tleskač, kolikrát dupnul každý dupač? Co jsme právě slyšeli.

60 sekund \Rightarrow právě se odpočítává číslo 30 \Rightarrow uslyšíme tlesknutí i dupnutí.

Tleskačí tleskli $30:2=15$ krát.

Dupači dupli $30:3=10$ krát.

Shrnutí: Složená čísla můžeme postupným dělením jednoznačně rozložit na součin prvočísel.