

1.3.17 Největší společný dělitel

Předpoklady: 010316

Číslo	Číslo	nsn	Platí pravidlo "nsn získáme jako součin obou čísel"?
$4 = 2 \cdot 2$	3	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	Násobící pravidlo platí.
3	5	$15 = 3 \cdot 5$	Násobící pravidlo platí.
3	7	$21 = 3 \cdot 7$	Násobící pravidlo platí.
$4 = 2 \cdot 2$	5	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	Násobící pravidlo platí.
$4 = 2 \cdot 2$	7	$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$	Násobící pravidlo platí.
$4 = 2 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	Do pravidla $4 \cdot 6 = 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ v nsn chybí 2.
3	$9 = 3 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	Do pravidla $3 \cdot 9 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
$4 = 2 \cdot 2$	$9 = 3 \cdot 3$	$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	Násobící pravidlo platí.
$6 = 2 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$	Do pravidla $6 \cdot 9 = 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
$12 = 2^2 \cdot 3$	$16 = 2^4$	$48 = 2^4 \cdot 3$	Do pravidla $12 \cdot 16 = 192 = 2^6 \cdot 3$ v nsn chybí 2^2 .

		Dělitel	Nsn	Součin	Pravidlo
2	3	1	6	6	ANO
3	4	1	12	12	Ano
$4 = 2 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	2	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$	NE
3	$9 = 3 \cdot 3$	3	$9 = 3 \cdot 3$	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$	NE
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	$15 = 3 \cdot 5$	3	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$	NE
$9 = 3 \cdot 3$	$4 = 2 \cdot 2$	1	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$	ANO
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	$15 = 3 \cdot 5$	5	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$	NE

Př. 1: Při hledání nejmenších společných násobků jsme získali předchozí tabulku. Rozhodni, které z dále uvedených hypotéz o tom, proč neplatí násobící pravidlo "Nejmenší společný násobek dvou čísel najdeme tak, že je vynásobíme." jsou z výsledků v tabulce zjevně nepravdivé a které naopak pravdivé být mohou.

- Násobící pravidlo funguje, když je alespoň jedno číslo ve dvojici liché.
- Násobící pravidlo funguje, když je alespoň jedno číslo ve dvojici prvočíslo.
- Násobící pravidlo nefunguje, když jsou obě čísla sudá.
- Násobící pravidlo nefunguje, když mají obě čísla společnou část prvočíselného rozkladu.

a) Násobící pravidlo funguje, když je alespoň jedno číslo liché.

To určitě není pravda, vidíme to v sedmé řádce:

3	$9 = 3 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	Do pravidla $3 \cdot 9 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
---	-----------------	-----------------	---

Obě čísla jsou lichá, pravidlo přesto nefunguje.

b) Násobící pravidlo funguje, když je alespoň jedno číslo prvočíslo.

Stejně jako v předchozím příkladu není nápad správný, vidíme to v sedmé řádce:

3	$9 = 3 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	Do pravidla $3 \cdot 9 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ v nsn chybí 3.
---	-----------------	-----------------	---

3 je prvočíslo, pravidlo nefunguje.

c) Násobící pravidlo nefunguje, když jsou obě čísla sudá.

Zdá se, že tento postřeh je správný. Ve všech řádcích, kde hledáme nejmenší společný dělitel dvou sudých čísel násobící pravidlo neplatí.

d) Násobící pravidlo nefunguje, když mají obě čísla společnou část prvočíselného rozkladu. Druhý postřeh, který je zřejmě správný, ve všech řádcích, kde mají obě čísla stejnou část prvočíselného rozkladu, pravidlo neplatí a dokonce vždy oproti násobícímu pravidlo chybí právě ta společná část.

Tento postřeh je navíc ve vztahu s předchozím, protože dvě sudá čísla mají ve svém prvočíselném rozkladu společnou minimálně jednu dvojku.

Př. 2: Pokus se najít postup, jak z prvočíselných rozkladů dvou čísel najít jejich nejmenší společný násobek. Jaký je význam té části prvočíselného rozkladu, která je oběma prvočíselným rozkladům společná?

Nejmenší společný násobek musí obsahovat prvočíselné rozklady obou čísel. Získáme ho tak, že dáme dohromady oba prvočíselné rozklady, prvočísla, která se vyskytují v obou rozkladech, použijeme pouze jednou (do vzniklého rozkladu se musí vyjít rozklady obou čísel).

Společná část obou rozkladů představuje číslo, kterým jsou dělitelná obě čísla - tedy společného dělitele (dokonce **největšího společného dělitele**).

Pro čísla $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ a $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ můžeme najít:

- **nejmenší společný násobek** $n(12,16) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ (vznikne jako nejmenší součin prvočísel, který obsahuje oba rozklady),
- **největší společný dělitel** $D(12,16) = 2 \cdot 2 = 4$ (součin prvočísel, která se vyskytují v obou rozkladech)

Trochu ledabyle můžeme také vnímat:

- **nejmenší společný násobek** jako nejmenší číslo, do kterého se obě čísla vejdou (proto se do jeho prvočíselného rozkladu musí vejít rozklady obou čísel),
- **největší společný dělitel** jako největší číslo, které se vejde do obou čísel (proto se jeho prvočíselný rozklad musí vejít do obou čísel).

Zkusíme najít $n(8,12)$ a $D(8,12)$.

Nejdříve vytvoříme prvočíselné rozklady:

- $8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$n(8,12)$ bude obsahovat $2 \cdot 2 \cdot 2$ (z rozkladu čísla 8) a 3 (z rozkladu čísla 12, dvě dvojky už přidávat nemusíme $\Rightarrow n(8,12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 6 = 24$).

$D(8,12) = 2 \cdot 2 = 4$ (oba rozklady obsahují součin $2 \cdot 2$).

Př. 3: Urči $n(12,18)$ a $D(12,18)$.

- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$$n(12,18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

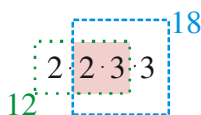
$$D(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Ke hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele se často používají různá grafická znázornění:

$$\begin{array}{r} 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

$$n(12,18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

$$D(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$



Př. 4: Najdi nejmenší společné násobky a největší společné dělitele pro následující dvojice čísel:

a) 9 a 12

- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $9 = 3 \cdot 3$

$$n(12,9) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36, \quad D(12,9) = 3$$

b) 15 a 9

- $15 = 3 \cdot 5$
- $9 = 3 \cdot 3$

$$n(15,9) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45, \quad D(15,9) = 3$$

c) 14 a 30

- $14 = 2 \cdot 7$
- $30 = 6 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$n(14,30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \quad D(14,30) = 2$$

d) 24 a 18

- $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$$n(24,18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72, \quad D(24,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

e) 20 a 28

- $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
- $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$$n(20,28) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140, \quad D(20,28) = 2 \cdot 2 = 4$$

f) 24 a 28

- $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

- $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$$n(24, 28) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168, \quad D(24, 28) = 2 \cdot 2 = 4$$

g) 60 a 84

- $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

- $84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$$n(60, 84) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420, \quad D(60, 84) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

h) 126 a 140

- $126 = 3 \cdot 42 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

- $140 = 10 \cdot 14 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

$$n(126, 140) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260, \quad D(126, 140) = 2 \cdot 7 = 14$$

Pedagogická poznámka: u opatrnějších žáků může nastat problém v bodu c), kde poprvé nestačí do nejmenšího společného násobku vzít rozklad prvního čísla a na jeho konec napsat část rozkladu druhého čísla.

Př. 5: Najdi nejmenší společné násobky a největší společné dělitele následujících skupin čísel: a) 3, 6, 8 b) 6, 10, 14 c) 6, 12, 18 d) 12, 15, 18

a) 3, 6, 8

- 3

- $6 = 2 \cdot 3$

- $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$n(3, 6, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24, \quad D(3, 6, 8) = 1$$

b) 6, 10, 14

- $6 = 2 \cdot 3$

- $10 = 2 \cdot 5$

- $14 = 2 \cdot 7$

$$n(6, 10, 14) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \quad D(6, 10, 14) = 2$$

c) 6, 12, 18

- $6 = 2 \cdot 3$

- $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

- $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$$n(6, 12, 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36, \quad D(6, 12, 18) = 6$$

d) 12, 15, 18

- $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

- $15 = 3 \cdot 5$

- $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$$n(12, 15, 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180, \quad D(12, 15, 18) = 3$$

Shrnutí: Z prvočíselného rozkladu můžeme snadno najít jak největšího společného dělitele tak nejmenší společný násobek.