

1.3.22 Využití společných násobků a dělitelů II

Předpoklady: 010321

Př. 1: Sepiš všechny znaky dělitelnosti a rozděl je do skupin.

Dělitelnost podle poslední cifry (2, 5, 10):

- číslo je dělitelné dvěma, právě když je poslední cifra sudá,
- číslo je dělitelné pěti, právě když končí na pětku nebo nulu,
- číslo je dělitelné deseti, právě když končí na nulu.

Dělitelnost podle posledního dvojčíslí (4, 100, 25, 20):

- číslo je dělitelné čtyřmi, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi,
- číslo je dělitelné 100, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné 100,
- číslo je dělitelné 25, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné 25,
- číslo je dělitelné 20, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné 20,

Dělitelnost podle ciferného součtu (3, 9):

- číslo je dělitelné třemi, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné třemi,
- číslo je dělitelné devíti, právě když je poslední dvojčíslí dělitelné devíti.

Dělitelnost podle dělitelnosti jinými čísly (6, ...):

- číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a třemi.

Pedagogická poznámka: Dělitelnost 6 je třeba připomenout (nejlépe odkazem na vyškrtávací tabulku).

Př. 2: Sestav pravidlo pro dělitelnost patnácti.

$15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ číslo je dělitelné patnácti, právě když je dělitelné 3 a 5.

Př. 3: Vyber správné (správné je pouze jedno) pravidlo pro dělitelnost 12:

- a) Číslo je dělitelné 12 právě, když je dělitelné čtyřmi a třemi najednou.
- b) Číslo je dělitelné 12 právě, když je dělitelné dvěma a šesti najednou.

Správná je možnost a) Číslo je dělitelné 12 právě, když je dělitelné čtyřmi a třemi najednou. Ne všechna čísla dělitelná šesti jsou dělitelná 12 \Rightarrow v bodě b) musí první podmínka vyloučit některá čísla dělitelná 6. To však nečiní, protože každé číslo dělitelné šesti je zároveň dělitelné i dvěma.

Stejně jako při hledání společných násobků se i při hledání pravidel dělitelnosti složených čísel situace komplikuje, když mají dvě čísla stejného dělitele \Rightarrow rozlišujeme:

- **čísla nesoudělná** (čísla, která nemají mimo jedničky společného dělitele),
- **čísla soudělná** (čísla, která mají mimo jedničky společného dělitele),

Například čísla 4 a 3 jsou nesoudělná, protože nemají žádné společné dělitele.

Čísla 2 a 6 naopak soudělná jsou, protože mají společného dělitele - číslo 2.

O soudělnosti (nesoudělnosti) můžeme mluvit, i když máme skupinu více než dvou čísel.

Př. 4: O každé skupině čísel rozhodni, zda jsou to čísla soudělná nebo nesoudělná.
a) 14 a 35 b) 24 a 15 c) 21 a 22 d) 60, 121 a 77

a) 14 a 35

$14 = 2 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow$ čísla 14 a 35 mají společného dělitele 7 \Rightarrow 14 a 35 jsou čísla soudělná.

b) 24 a 15

$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ čísla 24 a 15 mají společného dělitele 3 \Rightarrow 24 a 15 jsou čísla soudělná.

c) 21 a 22

$21 = 3 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11 \Rightarrow$ čísla 21 a 22 nemají společného dělitele \Rightarrow 21 a 22 jsou čísla nesoudělná.

d) 60, 121 a 77

$21 = 3 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11 \Rightarrow$ čísla 21 a 22 nemají společného dělitele \Rightarrow 21 a 22 jsou čísla nesoudělná.

Př. 5: Na jedno autíčko potřebujeme 4 kolečka, dvě osy a jednu karosérii. Kolik součástí potřebujeme na: a) 2 autíčka b) 5 autíček c) 10 autíček?

Co musí platit pro počty součástí potřebných k sestavení 5 autíček? Co pro počty součástí potřebných k sestavení 10 autíček?

Co musí platit pro počet koleček a počet os potřebných k sestavení libovolného počtu autíček? Co musí vždy platit pro počet koleček a počet karosérií?

a) 2 autíčka

Potřebujeme: $2 \cdot 4 = 8$ koleček, $2 \cdot 2 = 4$ osy, $2 \cdot 1 = 2$ karosérie.

b) 5 autíček

Potřebujeme: $5 \cdot 4 = 20$ koleček, $5 \cdot 2 = 10$ os, $5 \cdot 1 = 5$ karosérií.

Počty všech součástí jsou násobky 5.

c) 10 autíček

Potřebujeme: $10 \cdot 4 = 40$ koleček, $10 \cdot 2 = 20$ os, $10 \cdot 1 = 10$ karosérií.

Počty všech součástí jsou násobky 10.

Počet koleček musí být vždy dvakrát větší než počet os.

Počet koleček musí být vždy čtyřikrát větší než počet karosérií.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pomoc pro řešení příkladu následujícího.

Proto žákům, kteří mají s následujícím příkladem problémy nejdříve doporučuji přemýšlet o předchozím příkladu. Pak ještě jednou zdůrazním, že všechna čísla v bodě b) musí být násobky pěti, v bodě c) násobky deseti.

Př. 6: Jirka při pátrání na půdě objevil sáček s věcmi na sestavení poliček. V pytlíčku bylo 35 podložek, 42 šroubů, 56 maticek a 84 hřebíčků. Kolik poliček by šlo z kování v pytlíčku sestavit? Kolik kterých věcí je potřeba na smontování jedné poličky?

Pokud by součástky v pytlíčku byly na sestavení například 5 poliček, musely by být všechny počty součástí násobky 5 \Rightarrow hledáme společného dělitele počtů součástí (tedy číslo jehož násobky jsou všechny počty):

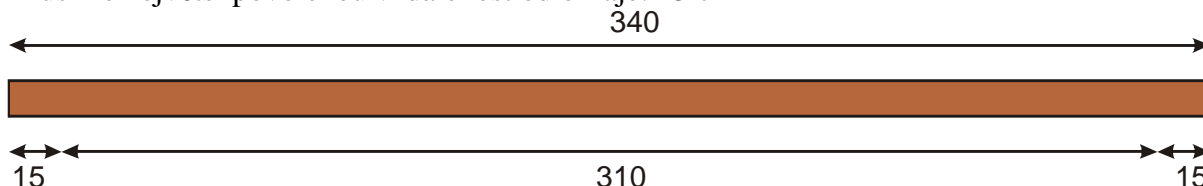
$$35 = 5 \cdot 7, 42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7, 56 = 8 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7, 84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$D(35, 42, 56, 84) = 7 \Rightarrow$ v pytlíčku jsou součástky na sestavení 7 poliček. Na jednu poličku je třeba 5 podložek, 6 šroubů, 8 maticek a 12 hřebíčků.

Dalším řešením by také mohlo být, že součástky jsou pouze na sestavení jediné poličky (na kterou by pak bylo třeba 35 podložek, 42 šroubů, 56 maticek a 84 hřebíčků).

Př. 7: Police dlouhá 340 cm musí být podepřena konzolami maximálně po každých 40 cm, krajní konzole musí být nejdále 15 cm od okraje police. Kolik konzol budeme potřebovat? Na kterých místech? (jako konzola se označuje podpěra).

Zkusíme největší povolenou vzdálenost od okraje: 15 cm



Z obrázku vidíme, že mezi krajními konzolami zbývá $340 - 2 \cdot 15 = 310$ cm.

Zkusíme 310 cm rozdělit na části po 40 cm: $310 : 40 = 7,75 \Rightarrow$ vzdálenost musíme rozdělit osm částí \Rightarrow mnoho možných řešení:

- umístíme krajní podpěry 15 cm od okrajů a prostor mezi nimi rozdělíme po $310 : 8 = 38,75$ cm (budeme mít problémy s odměřováním),
- umístíme krajní podpěry 10 cm od okrajů \Rightarrow rozdělujeme 320 cm na 8 částí \Rightarrow jedna část bude mít délku $320 : 8 = 40$ cm \Rightarrow potřebujeme 9 konzol,
- další možnosti.

Návrh na umístění podpěr (od jednoho z okrajů): 10, 50, 90, 130, 170, 210, 250, 290, 330.

Př. 8: Karel koupil obdélníkový pozemek o rozměrech 24 m x 42 m a plánuje jeho oplocení. Do každého rohu zabetonuje sloupek. A mezi ně pak přidá další sloupky, na které plánuje natáhnout pletivo. Jak daleko od sebe musí zabetonovat jednotlivé sloupky, abych mezi nimi byla stále stejná co největší vzdálenost? Kolik sloupků bude potřeba?

Sloupky musí obě strany rozdělit na stejně velké části (stejný problém jako když jsme hledali čtvercovou dlaždicí na vydláždění obdélníku), hledaným číslem musí být dělitelné oba rozměry \Rightarrow hledáme největšího společného dělitele.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, 42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow D(24, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

\Rightarrow musí vykopat sloupky po 6 metrech.

Počet sloupků:

- 4 sloupky v rozích pozemku,

- delší strany: $42 : 6 = 7 \Rightarrow$ bude třeba 6 sloupků na každé straně (dva krajní jsou rohové, které jsme již započítali) \Rightarrow na dvě strany 12 sloupků,
 - kratší strany: $24 : 6 = 4 \Rightarrow$ budou třeba 3 sloupky na každé straně (dva krajní jsou rohové, které jsme již započítali) \Rightarrow na dvě strany 6 sloupků,
- \Rightarrow celkem bude potřeba $4 + 12 + 6 = 22$ sloupků.

Př. 9: Karel vyřešil předchozí příklad a začal kopat díry na sloupky na jedné ze dvou kratších stran. Ve chvíli, kdy byl s první stranou hotový, se přihlítila manželka, že kolem zahrady nechce pletivo, ale plotové dílce s dřevěnými plaňkami o délce 4 m. Je možné plotovými dílci zahradu obehnat? Bude Karel muset překopat všechny již díry?

Pokud máme zahradu obehnat 4 m dílci, musí být délky stran dělitelné 4.

$24 : 4 = 6$, 42 není dělitelné 4 \Rightarrow na delších stranách bude muset Karel experimentovat (zřejmě zkrátit jeden z dílců na polovinu).

Díry vykopané Karlem na kratší straně 0, 6 m, 12 m, 18 m, 24 m.

Díry, které bude muset vykopat kvůli manželce: 0 m, 4 m, 8 m, 12 m, 16 m, 20 m, 24 m \Rightarrow bude moci použít díry 0 m, 12 m, 24 m.

Shrnutí: