

1.4.23 Dělitelnost (shrnutí)

Předpoklady: 010422

Nejdůležitější poznatky

- Platí $15 = 5 \cdot 3$, říkáme
 - 15 je násobek 3 (5)
 - 5 (3) je dělitel 15
 - 15 je dělitelné 3 a 5
- Pokud sčítáme (odčítáme) čísla dělitelná daným číslem (např. 5), je daným číslem (např. 5) dělitelný i jejich součet (rozdíl).
- Pravidla pro dělitelnost:
 - poslední číslice: 2, 5, 10
 - poslední dvojčíslí: 4, 20, 25, 50, 100
 - ciferný součet: 3, 9
 - dělitelnost dvou jiných nesoudělných čísel: 6, 12, 15, ...
- Složená čísla: více dělitelů než 2.
- Prvočísla: dva dělitele (samo sebe a jedničku - samozřejmě dělitelé),
 - Hledání prvočísel: dělíme prvočíslu, dokud dělení nevyjde beze zbytku nebo podíl není větší než dělitel,
- Prvočíselný rozklad: rozkládáme na dělitele, dokud nemáme součin prvočísel
- Mocniny zkracují zápis násobení: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.
- Nesoudělná čísla nemají společného dělitele kromě jedničky.
- Nejmenší společný násobek vznikne jako nejmenší součin prvočísel, který obsahuje oba rozklady.
- Největší společný dělitel vznikne jako součin prvočísel, která se vyskytují v obou prvočíselných rozkladech.
- Dláždít můžeme, když délka strany je násobek odpovídající délky strany dlaždice.

Př. 1: Najdi nejmenší společný násobek a největší společný dělitel pro uvedené skupiny čísel. Začni nejtěžším z bodů, na který si troufneš. Pokud ho vyřešíš správně k jednodušším se nevracej.

a) 36 a 48

b) 60 a 72

c) 96, 120, 144

a) 36 a 48

$$36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D(36, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$n(36, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$$

b) 60 a 72

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$D(60, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$n(60, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6 \cdot 6 = 360$$

c) 96, 120, 144

$$96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3$$

$$120 = 12 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$144 = 9 \cdot 16 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$D(96, 120, 144) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$n(96, 120, 144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 144 \cdot 10 = 1440$$

Př. 2: Urči D_{60} .

$$60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Př. 3: Rozhodni, zda číslo 559 je prvočíslo.

Zkoušíme dělit prvočísly:

$$559 : 2 \quad \text{není dělitelné (poslední cifra)}$$

$$559 : 3 \quad \text{není dělitelné (ciferný součet 19)}$$

$$559 : 5 \quad \text{není dělitelné (poslední cifra)}$$

$$559 : 7 = 79$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ 6 \end{array} \quad \text{není dělitelné}$$

$$559 : 11 = 50 \text{ } 9 \quad \text{není dělitelné}$$

$$559 : 13 = 43 \text{ } 39 \text{ } 0$$

Př. 4: Jaký nejmenší počet táborníků potřebujeme, abychom je mohli beze zbytku rozdělit do skupin po třech, šesti, osmi, dvanácti a patnácti?

Ze skupiny má být možné vytvořit skupiny po třech \Rightarrow počet členů skupiny musí být násobek tří \Rightarrow hledáme nejmenší společný násobek 3, 6, 8, 12, 15.

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$n(3, 6, 8, 12, 15) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

Pro vytvoření všech uvedených skupin potřebujeme minimálně 120 táborníků.

Př. 5: Jaké největší čtvercové dlaždice můžeme použít k vydláždění obdélníku o stranách 2,4 m x 4,2 m?

Rozeř dlaždice musí být dělitelem délek obou stran, pokud hledáme největší čtvercové dlaždice musí jít o největšího společného dělitele.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$D(24, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

Největší čtvercové dlaždice, které můžeme použít mají rozměry 0,6 x 0,6 m.

Př. 6: Je možné pomocí dlaždic o rozměrech 12 x 8 cm vydláždit obdélníkovou podlahu o rozměrech 2,7 m x 3,12 m?

Převedeme oba rozměry podlahy na cm a zjistíme, zda jsou dělitelné rozměry dlaždice.

$$2,7 \text{ m} = 270 \text{ cm}$$

270 není dělitelné 4 \Rightarrow není dělitelné 12 ani 8 \Rightarrow podlahu o rozměrech 2,7 m x 3,12 m nejde vydláždit pomocí dlaždic o rozměrech 12 x 8 cm.

Př. 7: Karel koupil obdélníkový pozemek o rozměrech 24 m x 42 m a plánuje jeho oplocení. Do každého rohu zabetonuje sloupek. A mezi ně pak přidá další sloupky, na které plánuje natáhnout pletivo. Jak daleko od sebe musí zabetonovat jednotlivé sloupky, abych mezi nimi byla stále stejná co největší vzdálenost? Kolik sloupků bude potřeba?

Sloupky musí obě strany rozdělit na stejně velké části (stejný problém jako když jsme hledali čtvercovou dlaždici na vydláždění obdélníku), hledaným číslem musí být dělitelné oba rozměry \Rightarrow hledáme největšího společného dělitele.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow D(24, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

\Rightarrow musí vykopat sloupky po 6 metrech.

Počet sloupků:

- 4 sloupky v rozích pozemku,
- delší strany: $42 : 6 = 7 \Rightarrow$ bude třeba 6 sloupků na každé straně (dva krajní jsou rohové, které jsme již započítali) \Rightarrow na dvě strany 12 sloupků,
- kratší strany: $24 : 6 = 4 \Rightarrow$ budou třeba 3 sloupky na každé straně (dva krajní jsou rohové, které jsme již započítali) \Rightarrow na dvě strany 6 sloupků,

\Rightarrow celkem bude potřeba $4 + 12 + 6 = 22$ sloupků.

Př. 8: Karel vyřešil předchozí příklad a začal kopat díry na sloupky na jedné ze dvou kratších stran. Ve chvíli, kdy byl s první stranou hotový, se přihlítila manželka, že kolem zahrady nechce pletivo, ale plotové dílce s dřevěnými plaňkami o délce 4 m. Je možné plotovými dílci zahradu obehnat? Bude Karel muset překopat všechny již vykopané díry?

Pokud máme zahradu obehnat 4 m dílci, musí být délky stran dělitelné 4.

$24 : 4 = 6$, 42 není dělitelné 4 \Rightarrow na delších stranách bude muset Karel experimentovat (zřejmě zkrátit jeden z dílců na polovinu).

Díry vykopané Karlem na kratší straně 0, 6 m, 12 m, 18 m, 24 m.

Díry, které bude muset vykopat kvůli manželce: 0 m, 4 m, 8 m, 12 m, 16 m, 20 m, 24 m \Rightarrow bude moci použít díry 0 m, 12 m, 24 m.

Shrnutí: