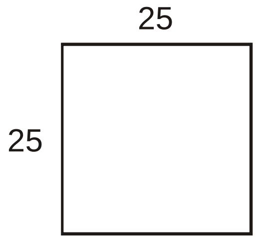
1.4.10 Obsahy

Předpoklady: 010409

Př. 1: Jarda a Pavel si koupili zahradu a dohadují se, kdo nakoupil lépe. Jardova zahrada má tvar čtverce o straně 25 m, Pavlova tvar obdélníku o stranách 20 m x 30 m. Kolik metrů pletiva bude třeba na oplocení každé ze zahrad? Jakou mají zahrady plochu? Která ze zahrad je výhodnější, pokud za výhodnější pokládáme zahradu s co největší plochou při co nejmenší délce pletiva na oplocení? Navrhni nejvýhodnější pravoúhelníkový tvar zahrady.

Počet metrů pletiva k oplocení odpovídá obvodu zahrady.

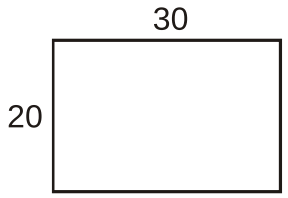
Jardova zahrada



Obvod: $o = a + a + a + a = 4a = 4 \cdot 25 = 100\,\mathrm{m}$

Obsah: $S = a \cdot a = 25 \cdot 25 = 625\,\mathrm{m}^2$

Pavlova zahrada



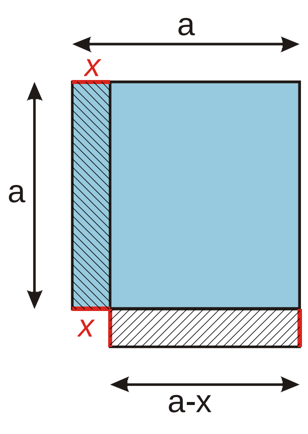
Obvod:

$o = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b) = 2(20 + 30) = 100\,\mathrm{m}$

Obsah: $S = a \cdot b = 20 \cdot 30 = 600\,\mathrm{m}^2$

Jardova zahrada je výhodnější, při stejném obvodu má větší plochu.

Nejvýhodnějším pravoúhelníkovým tvarem při požadavcích na minimální obvod při co největší ploše je čtverec.
Můžeme si ukázat, jak při změně čtverce na obdélník se stejným obvodem vždy zmenšíme obsah.



Modrý čtverec změníme na obdélník se stejným obvodem tím, že odebereme ze dvou rovnoběžných stran dva kousky o délce x a přidáme je k druhým dvěma stranám.

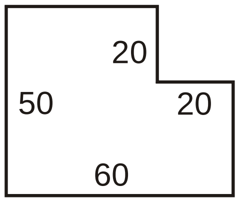
- Obsah obdélníku je oproti obsahu čtverce menší o vyšrafovaný obdélník s obsahem $S = a \cdot x$.
- Obsah obdélníku je větší než obsah čtverce o vyšrafovaný obdélník s obsahem $S = (a - x)x$ (přibylo méně než ubylo).

Bez ohledu na velikost odebraného kousku je úbytek větší než přírůstek $\Rightarrow$ změnou čtverce na obdélník se obsah vždy zmenší $\Rightarrow$ ze všech pravoúhelníků má při daném obvodu největší obsah čtverec.

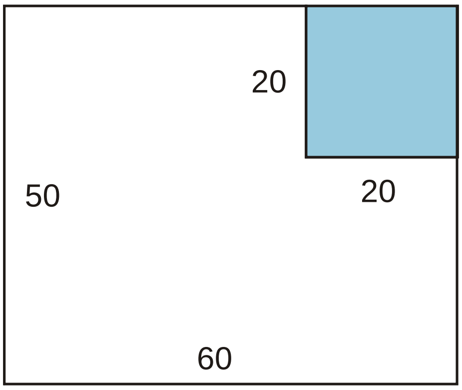
Pedagogická poznámka: V učebnici a na tabuli používám vzorce a zápisy pomocí *a* a *b*, po žácích zatím nic podobného nepožaduji. Jde o to, aby si pomalu a nenásilně zvykali, že se tento způsob zápisu používá a může být užitečný.

Pedagogická poznámka: Pokud se objeví žák, který neumí počítat obsah nebo obvod, nikdy mu neradím vzorec na dosazení. U obvodu chci, aby začal počítat délku lana, které půjde okolo zahrady natáhnout, v případě obsahu si nakreslíme na čtverečkované pozadí obdélník 2 x 3 a nechám ho spočítat obsah. Snažím se, aby po dokončení výpočtu zapsali svůj postup vzorcem.

Př. 2: Mirka plánuje koupi stavebního pozemku. Rozměry pozemku jsou uvedeny v plánku. Kolik za pozemek zaplatí, pokud cena $1\,\mathrm{m}^2$ je 450 Kč?



Zahrada nemá ani tvar čtverce ani tvar obdélníku $\Rightarrow$ zkusíme její tvar rozložit na obdélníky (případně čtverce) $\Rightarrow$ několik řešení.

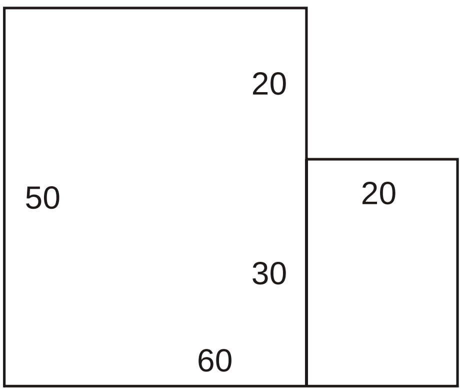


Zahradu můžeme doplnit modrým čtvercem na celý obdélník.

Obsah obdélníku: $S_o = ab = 50 \cdot 60 = 3000\,\mathrm{m}^2$.

Obsah doplňujícího čtverce: $S_c = a \cdot a = 20 \cdot 20 = 400\,\mathrm{m}^2$.

Plocha zahrady: $S = S_o - S_c = 3000 - 400 = 2600\,\mathrm{m}^2$.

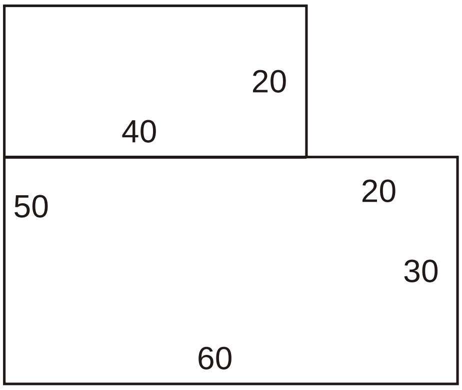


Zahradu můžeme rozdělit svislou čarou na dva obdélníky.

Obsah pravého obdélníku: $S_1 = ab = 20 \cdot 30 = 600\,\mathrm{m}^2$.

Obsah levého obdélníku: $S_2 = a \cdot a = 50 \cdot 40 = 2000\,\mathrm{m}^2$.

Plocha zahrady: $S = S_1 + S_2 = 600 + 2000 = 2600\,\mathrm{m}^2$.



Zahradu můžeme rozdělit vodorovnou čarou na dva obdélníky.

Obsah horního obdélníku: $S_1 = ab = 20 \cdot 40 = 800\,\mathrm{m}^2$.

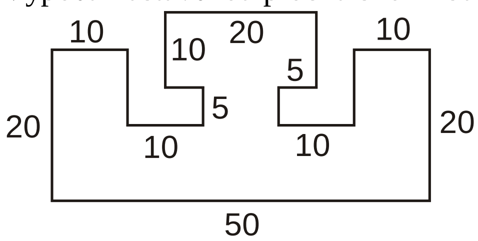
Obsah dolního obdélníku: $S_2 = a \cdot a = 30 \cdot 60 = 1800\,\mathrm{m}^2$.

Plocha zahrady: $S = S_1 + S_2 = 800 + 1800 = 2600\,\mathrm{m}^2$.

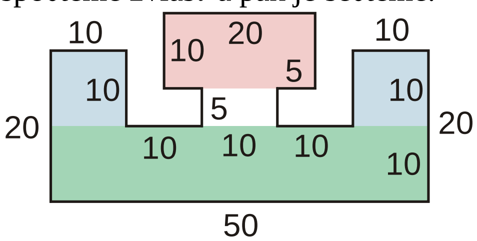
Pedagogická poznámka: Někteří žáci určitě na začátku namítnou, že se učili počítat jen obsahy čtverců a obdélníků. V tomto okamžiku rozhodně neradím, co mají dělat, jenom je ujistím, že tyhle dvě znalosti stačí i na vyřešení našeho příkladu.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad kontrolujeme až ve chvíli, kdy jej mají všichni (nebo alespoň téměř všichni) hotový. Rychlejší část třídy zatím počítá následující příklad, který s pomalejší částí třídy přeskočíme, aby všichni měli dost času na příklad 4. Při kontrole by měly zaznít všechny v textu uvedené možnosti řešení (pokud žáci počítají sami, určitě každý z postupů alespoň někdo použije).

Př. 3: Vypočti zastavěnou plochu školní budovy zakreslené na plánku.



Stejně jako v předchozím příkladu rozdělíme obrazec na obdélníky a čtverce, jejichž obsahy spočteme zvlášť a pak je sečteme.



Modré čtverce: $S_m = a \cdot a = 10 \cdot 10 = 100\,\mathrm{m}^2$.

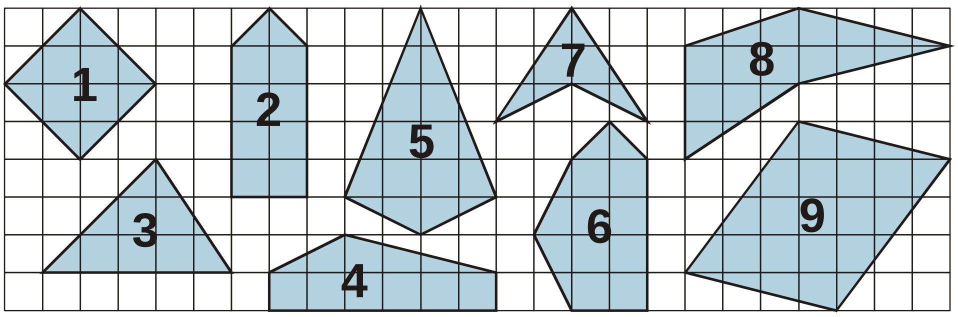
Zelený obdélník: $S_z = a \cdot b = 10 \cdot 50 = 500\,\mathrm{m}^2$.

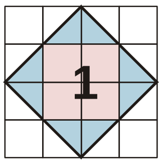
Červený obdélník: $S_c = a \cdot b = 10 \cdot 20 = 200\,\mathrm{m}^2$.

Bílý obdélník: $S_b = a \cdot b = 5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{m}^2$.

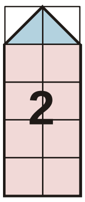
Cela plocha: $S = 2 \cdot S_m + S_z + S_c + S_b = 2 \cdot 100 + 500 + 200 + 50 = 950\,\mathrm{m}^2$.

Př. 4: Urči obsahy obrazců nakreslených v síti. Předpokládej, že obrázek je zmenšený a velikost 1 čtverečku je $1\,\text{cm}^2$.

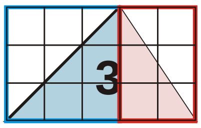




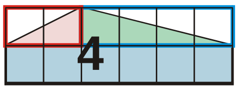
$S = 4 + 8 \cdot 0,5 = 4 + 4 = 8\,\text{cm}^2$



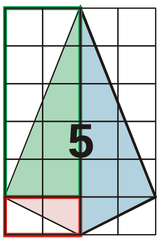
$S = 8 + 2 \cdot 0,5 = 8 + 1 = 9\,\text{cm}^2$



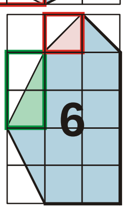
Modrý trojúhelník je polovina z modrého čtverce (polovina z 9).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina z $2 \cdot 3 = 6$).
$S = 3 + 4,5 = 7,5\,\text{cm}^2$



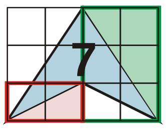
Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina ze 4).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina ze 2).
$S = 1 + 6 + 2 = 9\,\text{cm}^2$



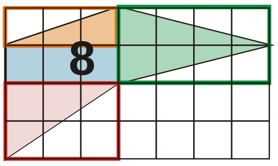
Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina z $2 \cdot 5 = 10$).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina z 1).
$S = 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 1 + 2 + 8 = 11\,\text{cm}^2$



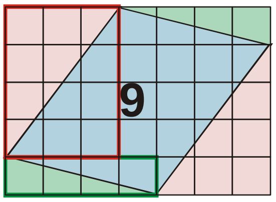
Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina ze 2).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina ze 2).
$S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 12\,\text{cm}^2$



Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina z $2 \cdot 3 = 6$).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina ze 2).
$S = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 12 - 2 - 6 = 4\,\text{cm}^2$



Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina z $2 \cdot 4 = 8$).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina z $2 \cdot 3 = 6$).
Oranžový trojúhelník je polovina z oranžového obdélníku (polovina z $2 \cdot 3 = 6$).
$S = 3 + 3 + 4 + 1{,}5 = 11{,}5\,\text{cm}^2$

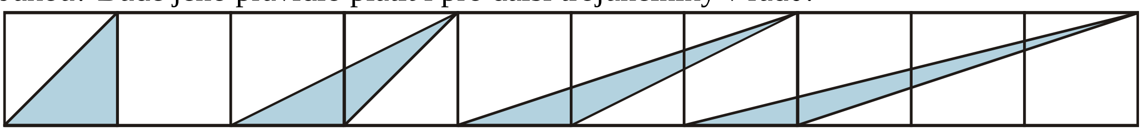


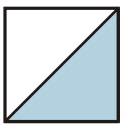
Zelený trojúhelník je polovina ze zeleného obdélníku (polovina z $1 \cdot 4 = 4$).
Červený trojúhelník je polovina z červeného obdélníku (polovina z $3 \cdot 4 = 12$).
$S = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 19\,\text{cm}^2$

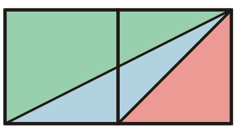
Dodatek: Existuje mnoho dalších správných postupů na určení obsahů v předchozím příkladu. Proto není na místě považovat uvedené postupy za jediné správné nebo nejlepší. Naopak, pokud žák příklad vyřeší vlastní cestou, je to daleko přínosnější, než když převezme učebnicový postup.

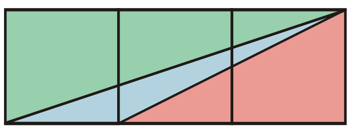
Pedagogická poznámka: Zlomovým obrazcem je trojúhelník 3. Zde je u části žák třeba minimálně naznačit, že si trojúhelník můžeme rozdělit na dva menší doplnitelné na obdélník a čtverec. U dalších obrazců pak většinou stračí připomenout řešení u tohoto obrazce.
Už během řešení postupně připisuji na tabuli hodnoty jednotlivých obsahů, aby žáci mohli kontrolovat své výsledky a hledat případné chyby. Vzhledem k tomu, že samotná hodnota obsahu nenapovídá, jak ji získat (a možností je většinou mnoho), nenarušuji zveřejněním výsledků jejich samostatnou práci.

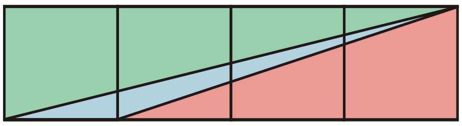
Př. 5: Pepa zkoumal obsahy trojúhelníků na obrázku a zjistil velmi zajímavou skutečnost. Jakou? Bude jeho pravidlo platit i pro další trojúhelníky v řadě?




Obsah modrého trojúhelníku je 0,5 čtverečku.


Obsah modrého trojúhelníku je $S = 2 - 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.


Obsah modrého trojúhelníku je $S = 3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}5$.

 Obsah modrého trojúhelníku je $S = 4 - 2 - 1,5 = 0,5$.

Stejný obsah budou míti všechny další modré trojúhelníky v řadě, protože když přidáme další čtvereček, zvětší se obsahy zeleného i červeného trojúhelníku o 0,5.

Pedagogická poznámka: Jako nápovědu používám obrázek pro druhý trojúhelník (bez dalšího komentáře).

Pedagogická poznámka: Někteří žáci používají jako argument i napodobeninu Cavalieriho principu (všechny modré trojúhelníky jsou poskládány ze stejných vodorovných čárek).

Shrnutí: Obsahy složitějších obrazců určíme, když si je rozdělíme (nebo doplníme).