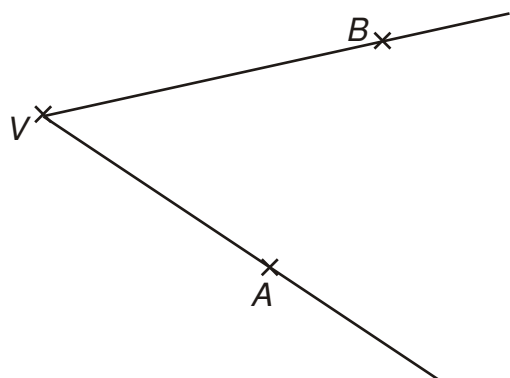
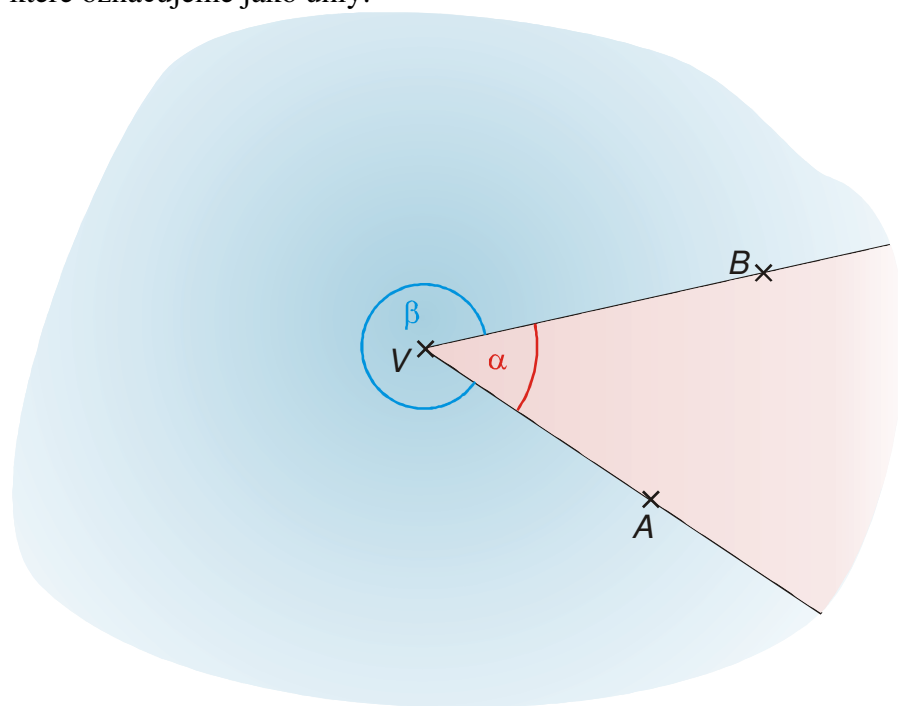


## 1.5.1 Úhel

Předpoklady: 010409



Dvě polopřímky  $VA$  a  $VB$  se společným počátečním bodem  $V$  rozdělily rovinu na dvě části, které označujeme jako úhly.



červený úhel (konvexní)

$\sphericalangle AVB$  nebo  $\sphericalangle BVA$

modrý úhel (nekonvexní)

$\sphericalangle AVB$  nebo  $\sphericalangle BVA$

- Bod  $V$  označujeme jako vrchol.
- Polopřímky  $VA$  a  $VB$  označujeme jako ramena.
- Mezi body úhlu patří všechny body jeho ramen a všechny body ležící uvnitř.
- Často označujeme úhly pomocí řeckých písmen (nejčastěji  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$  a  $\omega$ ).
- Do obrázku vyznačujeme úhel kruhovým obloukem.

Body, které tvoří úhel, můžeme získat i tím, že jedno z ramen otočíme okolo vrcholu vhodným směrem k druhému rameni.

**Pedagogická poznámka:** Od začátku se snažím, aby žáci vnímali úhel také jako důsledek otáčení ramen, což ukazují na přiloženém souboru pro Geogebra.

**Př. 1:** Který z bodů úhlu  $\sphericalangle CDE$  je vrcholem úhlu? Kde leží dva zbývající body, které úhel určují?

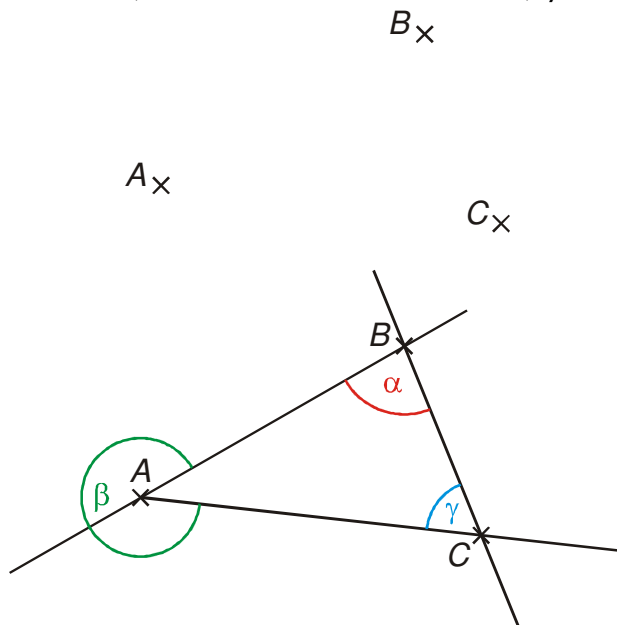
Vrchol úhlu píšeme v jeho označení vždy jako prostřední písmeno  $\Rightarrow$  vrcholem úhlu  $\sphericalangle CDE$  je bod  $D$ . Zbývající body leží na jeho ramenech (polopřímkách, které mají společný počátek v bodu  $D$ ).

**Př. 2:** Překresli obrázek do sešitu a vyznač v něm úhly:

a)  $\alpha = \sphericalangle CBA$

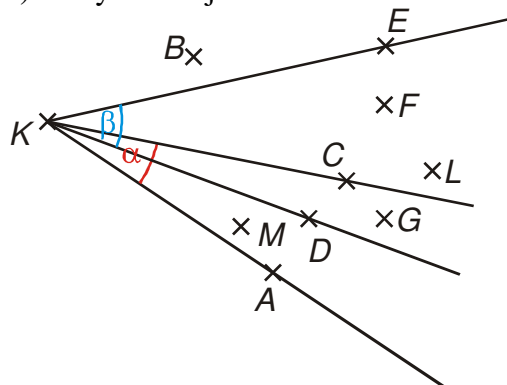
b)  $\beta = \sphericalangle BAC$

c)  $\gamma = \sphericalangle ACB$



**Př. 3:** Na obrázku jsou nakresleny úhly  $\alpha$  a  $\beta$ .

- Popiš oba úhly pomocí bodů.
- Které body na obrázku náležejí úhlu  $\alpha$ ?
- Které body na obrázku náležejí úhlu  $\beta$  i úhlu  $\alpha$ ?
- Které body na obrázku náležejí úhlu  $\beta$ , ale nenáležejí úhlu  $\alpha$ ?
- Který z úhlů je větší?



a) Popiš oba úhly pomocí bodů.

$\alpha = \sphericalangle CKA$

$\beta = \sphericalangle EKD$

b) Které body na obrázku náležejí úhlu  $\alpha$  ?

Úhlu  $\alpha$  náležejí body  $A, K, M, D, G, C$ .

c) Které body na obrázku náležejí úhlu  $\beta$  i úhlu  $\alpha$  ?

Úhlu  $\alpha$  i  $\beta$  náležejí body  $K, D, G, C$ .

d) Které body na obrázku náležejí úhlu  $\beta$ , ale nenáležejí úhlu  $\alpha$  ?

Úhlu  $\beta$  náležejí a zároveň úhlu  $\alpha$  nenáležejí body  $L, F, E$ .

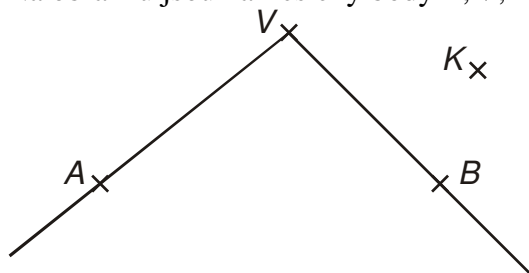
e) Který z úhlů je větší?

Větší je úhel  $\beta$ .

- Více možných zdůvodnění:
- zabírá větší část roviny,
- je více „rozevřený“,
- část úhlu  $\beta$ , která nenáležejí také úhlu  $\alpha$ , je jasně větší než část úhlu  $\alpha$ , která nenáležejí úhlu  $\beta$ ,
- ...

**Pedagogická poznámka:** Poslední bod předchozího příkladu samozřejmě neřešíme exaktně, protože ještě nevíme přesně, jak se velikost úhlu měří. Jde jen o to, aby bylo jasné, že velikost úhlů odpovídá běžné představě.

**Př. 4:** Na obrázku jsou nakresleny body  $A, V, B$  a  $K$ . Náleží bod  $K$  do úhlu  $AVB$ ?



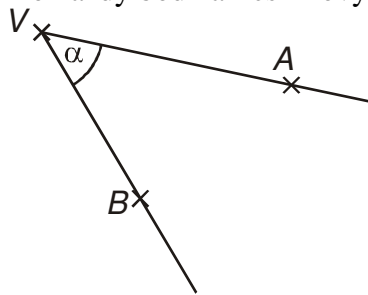
Na otázku v zadání nelze odpovědět. Bod  $K$  leží v nekonvexním úhlu  $AVB$  a neleží v konvexním úhlu  $AVB$ . Pokud nerozhodneme, o kterém z těchto úhlů mluvíme, nemůžeme rozhodnout ani o tom, zda do něj bod  $K$  patří nebo ne.

**Pedagogická poznámka:** Protože v předchozím příkladu vystupují pouze konvexní úhly, najde se určitě dost žáků, kteří budou přesvědčeni, že bod  $K$  v úhlu  $AVB$  neleží. Situaci by měla vyjasnit diskuse mezi žáky.

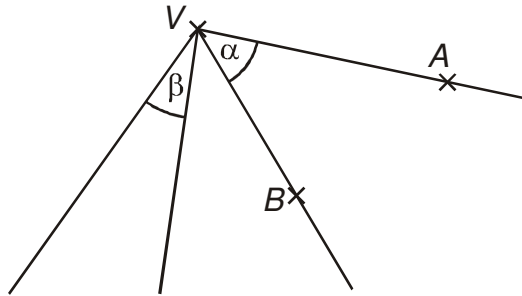
**Př. 5:** Na obrázku je nakreslen úhel  $\alpha$ . Dokresli do obrázku konvexní úhel  $\beta$  tak, aby platilo:

- Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný jen bod  $V$ .
- Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  nemají žádný společný bod.
- Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společné jen rameno  $VA$ .
- Všechny body úhlu  $\beta$  náležejí úhlu  $\alpha$ .
- Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný trojúhelník  $ABV$ .

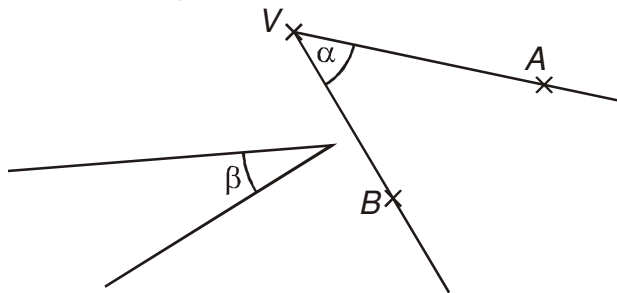
Pro každý bod nakresli nový obrázek.



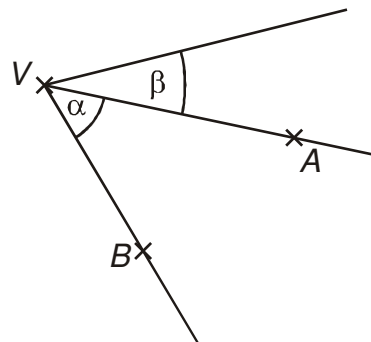
a) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný je bod V.



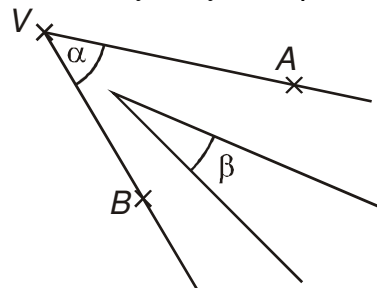
b) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  nemají žádný společný bod.



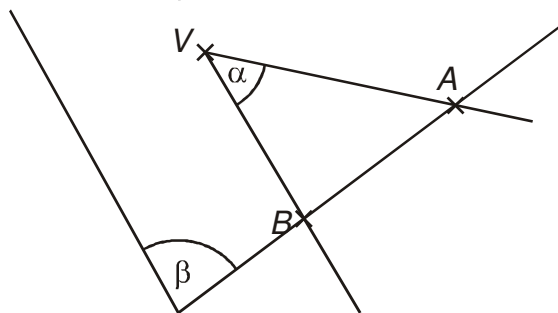
c) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společné jen rameno VA.



d) Všechny body úhlu  $\beta$  náležejí úhlu  $\alpha$ .



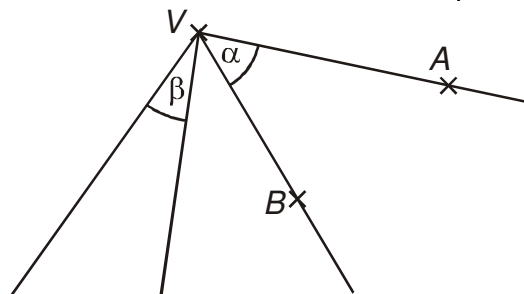
e) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný trojúhelník  $ABV$ .



**Př. 6:** Které z bodů předchozího příkladu by měly a které by neměly řešení, pokud by vrcholem úhlu  $\beta$  musel být bod  $V$ .

a) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný je bod  $V$ .

Příklad má řešení s vrcholem úhlu  $\beta$  v bodě  $V$ .

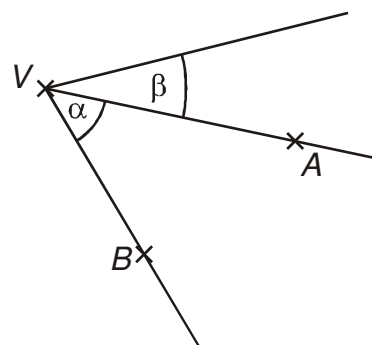


b) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  nemají žádný společný bod.

Příklad nemá řešení s vrcholem úhlu  $\beta$  v bodě  $V$  (tento body je bodem úhlu  $\alpha$  a je tudíž společným bodem obou úhlů).

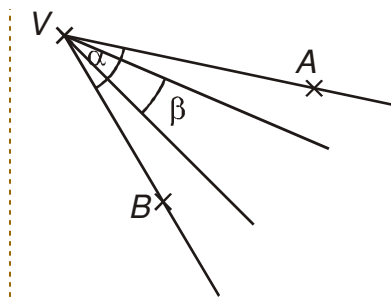
c) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společné jen rameno  $VA$ .

Příklad má řešení s vrcholem úhlu  $\beta$  v bodě  $V$ .



d) Všechny body úhlu  $\beta$  náležejí úhlu  $\alpha$ .

Příklad má řešení s vrcholem úhlu  $\beta$  v bodě  $V$ .



e) Úhly  $\alpha$  a  $\beta$  mají společný trojúhelník  $ABV$ .  
Příklad nemá řešení s vrcholem úhlu  $\beta$  v bodě  $V$ .

**Shrnutí:** Dvě polopřímky se společným počátkem rozdělují rovinu na dva úhly.