

## 1.7.2 Úhly v trojúhelníku

**Předpoklady:** 010516, 010701

**Př. 1:** Podle jakého kritéria dělíme trojúhelníky na ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé?

Na ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé dělíme trojúhelníky podle velikosti největšího úhlu.

**Pedagogická poznámka:** Jako první nápad určitě padne: „Podle velikosti úhlů“. Označuji ho jako správný, ale ne úplně přesný, protože podle tohoto kritéria můžeme trojúhelníky roztrždit i na obecné, rovnoramenné a rovnostranné (podle toho kolik úhlů se shoduje ve velikosti).

**Př. 2:** Zapiš pravidla pro vnitřní a vnější úhly trojúhelníků.

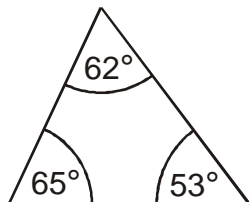
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  (součet úhlů v trojúhelníku je roven  $180^\circ$ ).
- $\alpha + \alpha' = 180^\circ$  (součet vnitřního a jeho vnějšího úhlu je  $180^\circ$ ).

**Př. 3:** Které z uvedených trojic čísel udávají velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku? U trojic, které udávají vnitřní úhly trojúhelníku, načrtni přibližný tvar. Rozhodni, zda je tento trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý. Rozhodni, zda je tento trojúhelník rovnoramenný, rovnostranný nebo obecný.

- a)  $65^\circ; 53^\circ; 62^\circ$       b)  $178^\circ; 1^\circ; 1^\circ$       c)  $43^\circ; 90^\circ; 57^\circ$       d)  $22^\circ; 143^\circ; 15^\circ$

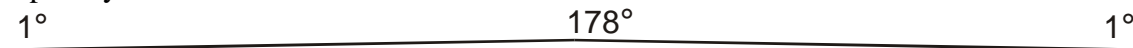
a)  $65^\circ; 53^\circ; 62^\circ$

Součet:  $65^\circ + 53^\circ + 62^\circ = 180^\circ \Rightarrow$  jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je obecný a ostroúhlý.



b)  $178^\circ; 1^\circ; 1^\circ$

Součet:  $178^\circ + 1^\circ + 1^\circ = 180^\circ \Rightarrow$  jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je rovnoramenný a tupoúhlý.

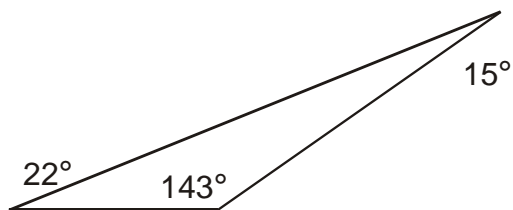


c)  $43^\circ; 90^\circ; 57^\circ$

Součet:  $43^\circ + 90^\circ + 57^\circ = 190^\circ \Rightarrow$  nejde o vnitřní úhly trojúhelníku.

d)  $22^\circ; 143^\circ; 15^\circ$

Součet:  $22^\circ + 143^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow$  jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je obecný a tupoúhlý.



**Pedagogická poznámka:** Nakreslení trojúhelníku v bodu b) se ukazuje jako poměrně náročný oříšek, někteří žáci nakreslí jeden malý úhel, ale pro druhý už jim na stránce nezbyvá místo a tak trojúhelník uzavřou třetí („svislou“) stranou čímž získají vlastně polovinu správného výsledku. Překvapivě časté jsou chyby i v bodu c), kde někteří žáci fakticky kontrolují pouze nulu na místě jednotek a shodu na místě desítek předpokládají automaticky.

**Př. 4:** Dopočti zbývající vnitřní úhel trojúhelníku.

a)  $\alpha = 17^\circ, \beta = 86^\circ$

b)  $\alpha = 57^\circ, \gamma = 93^\circ$

c)  $\beta = 71^\circ 45', \gamma = 39^\circ 56'$

a)  $\alpha = 17^\circ, \beta = 86^\circ$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180^\circ - 17^\circ - 86^\circ = 77^\circ$$

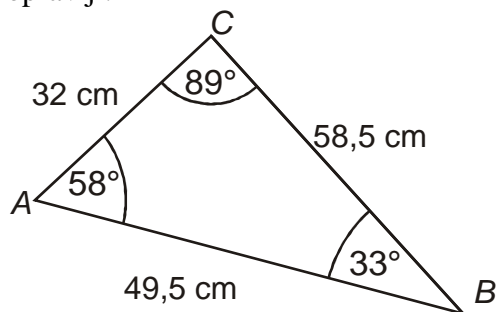
b)  $\alpha = 57^\circ, \gamma = 93^\circ$

$$\beta = 180 - \alpha - \gamma = 180^\circ - 57^\circ - 93^\circ = 30^\circ$$

c)  $\beta = 71^\circ 45', \gamma = 39^\circ 56'$

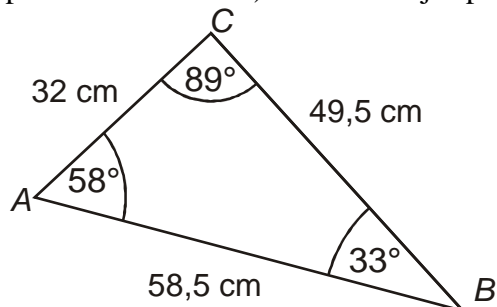
$$\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180^\circ - 71^\circ 45' - 39^\circ 56' = 180^\circ - 111^\circ 41' = 68^\circ 19'$$

**Př. 5:** Zkontroluj, zda je náčrtek trojúhelníku správný. Pokud v náčrtku najdeš chybu, oprav ji.

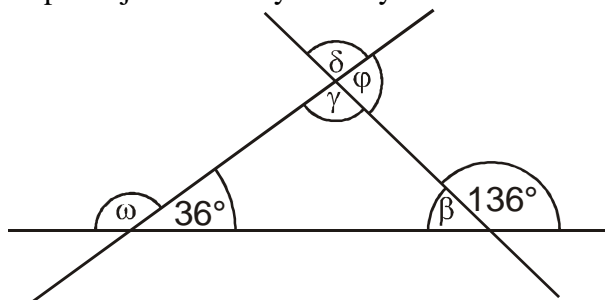


Součet úhlů:  $58^\circ + 33^\circ + 89^\circ = 180^\circ$ . V pořádku.

Neplatí, že větší strana musí ležet proti většímu úhlu (proti největšímu úhlu leží strana prostřední velikosti)  $\Rightarrow$  náčrtek je špatný  $\Rightarrow$  prohodíme popisky velikostí stran  $a$  a  $c$ .



**Př. 6:** Dopačítej velikosti vyznačených úhlů.



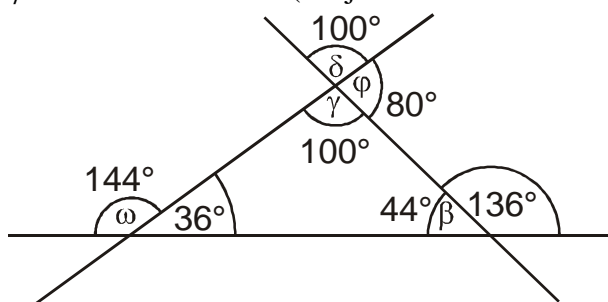
$$\omega = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ \text{ (vnější úhel k vnitřnímu úhlu } 36^\circ \text{)}$$

$$\beta = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ \text{ (vnitřní úhel k vnějšímu úhlu } 136^\circ \text{)}$$

$$\gamma = 180^\circ - 36^\circ - 44^\circ = 100^\circ \text{ (součet vnitřních úhlů v trojúhelníku)}$$

$$\delta = \gamma = 100^\circ \text{ (vrcholové úhly)}$$

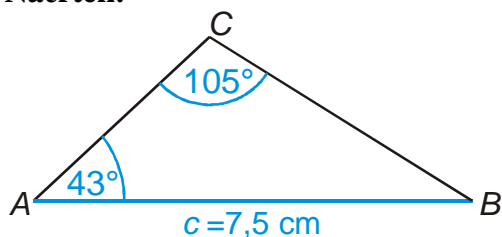
$$\varphi = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (vnější úhel k vnitřnímu úhlu } 100^\circ \text{)}$$



**Pedagogická poznámka:** Na zbytek hodiny je třeba minimálně 15 minut, proto řešení předchozích příkladů přeruším.

**Př. 7:** Narýsuj trojúhelník  $ABC$ , pro který platí:  $c = 7,5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 43^\circ$ ,  $\gamma = 105^\circ$ . Začni náčrtekem. Sepiš i postup konstrukce.

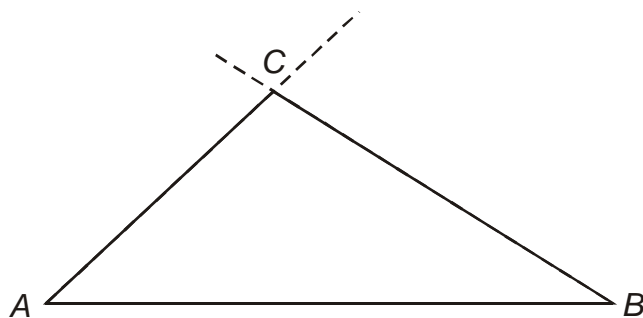
**Náčrtek:**



**Problém:** Snadno narýsujeme stranu  $c$  i úhel  $\alpha$ , ale nevíme jak nakreslit úhel  $\gamma$ , protože když zvolíme vrchol úhlu na straně  $AC$  libovolně, nemusíme se druhým ramenem trefit do bodu  $B$ .

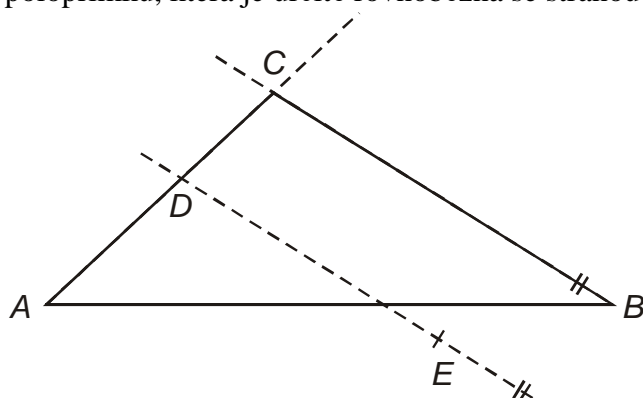
**Řešení:** Součet úhlů v trojúhelníku je  $180^\circ$ , známe dva úhly  $\Rightarrow$  můžeme dopočítat třetí a využít ho k narýsování trojúhelníku.

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 43^\circ - 105^\circ = 32^\circ$$



1. úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6\text{ cm}$
2. úhel  $\alpha = 43^\circ$
3. úhel  $\beta = 32^\circ$
4. bod  $C$

**Jiné řešení:** Vybereme si libovolný bod na přímce  $AC$  a narýsujeme úhel  $\gamma$ . Získáme tak polopřímku, která je určitě rovnoběžná se stranou  $BC \Rightarrow$  bodem  $B$  vedeme rovnoběžku.



1. úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6\text{ cm}$
2. úhel  $\alpha = 43^\circ$
3. úhel  $\sphericalangle ADE = \gamma = 105^\circ$
4. rovnoběžka s přímkou  $DE$  bodem  $B$
5. bod  $C$

**Pedagogická poznámka:** Vyřešit příklad dopočítáním třetího úhlu určitě někoho napadne. Se sestrojováním rovnoběžky je to horší. Protože jde o ukázkou často používané metody, snažím se žákům k objevu dopomoci například tím, že zkusíme do náčrtku úhel dokreslit a bavíme se o tom, co se v takovém případě asi nepovede a čím by to šlo spravit.

**Př. 8:** Rovnoramenný trojúhelník má jeden z úhlů o velikosti  $96^\circ$ . Urči velikost zbývajících vnitřních úhlů.

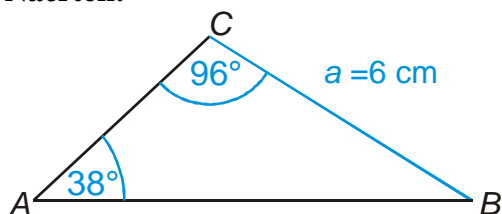
Rovnoramenný trojúhelník má dva shodné úhly. Zadaný úhel to být nemůže, protože je větší než  $90^\circ$  (a spolu s druhým shodným úhlem by měl součet větší než  $180^\circ$ ).

Součet velikostí zbývajících dvou úhlů:  $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$ .

Zbývající dva úhly jsou shodné  $\Rightarrow$  jejich velikost  $84^\circ : 2 = 42^\circ$ .

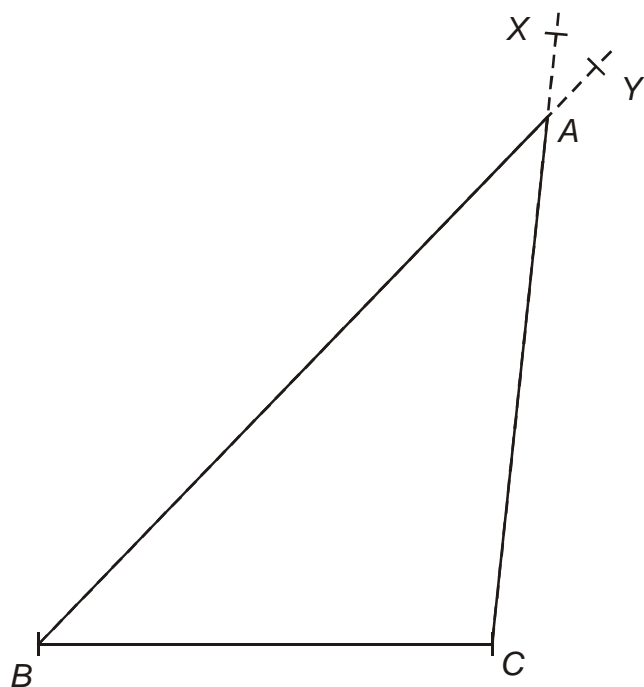
**Př. 9:** Narýsuj trojúhelník  $ABC$ , pro který platí:  $a = 6\text{ cm}$ ,  $\gamma = 96^\circ$ ,  $\alpha = 38^\circ$ . Začni náčrtkem. Sepiš i postup konstrukce.

**Náčrtek:**



V podstatě stejné jako příklad 6  $\Rightarrow$  řešíme stejným způsobem.

$$\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 96^\circ - 38^\circ = 46^\circ$$



1. úsečka  $BC$ ,  $|AB| = 6 \text{ cm}$
2. polopřímka  $CX$ ,  $|\sphericalangle BCX| = \gamma = 96^\circ$
3. polopřímka  $BY$ ,  $|\sphericalangle CBY| = \beta = 46^\circ$
4. bod  $A$ , průsečík polopřímek  $CX$  a  $BY$
5. trojúhelník  $ABC$

**Shrnutí:** Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je  $180^\circ$ .