

1.7.2 Úhly v trojúhelníku

Předpoklady: 010516, 010701

Př. 1: Podle jakého kritéria dělíme trojúhelníky na ostroúhlé, pravouhlé a tupouhlé?

Na ostroúhlé, pravouhlé a tupouhlé dělíme trojúhelníky podle velikosti největšího úhlu.

Pedagogická poznámka: Jako první nápad určitě padne: „Podle velikosti úhlů“. Označuji ho jako správný, ale ne úplně přesný, protože podle tohoto kritéria můžeme trojúhelníky roztrždit i na obecné, rovnoramenné a rovnostranné (podle toho kolik úhlů se shoduje ve velikosti).

Př. 2: Zapiš pravidla pro vnitřní a vnější úhly trojúhelníků.

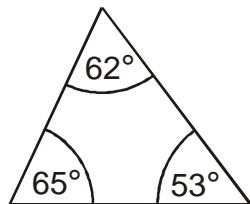
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (součet úhlů v trojúhelníku je roven 180°).
- $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ (součet vnitřního a jeho vnějšího úhlu je 180°).

Př. 3: Které z uvedených trojic čísel udávají velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku? U trojic, které udávají vnitřní úhly trojúhelníku, načrtni přibližný tvar. Rozhodni, zda je tento trojúhelník ostroúhlý, pravouhlý nebo tupouhlý. Rozhodni, zda je tento trojúhelník rovnoramenný, rovnostranný nebo obecný?

- a) $65^\circ; 53^\circ; 62^\circ$ b) $178^\circ; 1^\circ; 1^\circ$ c) $43^\circ; 90^\circ; 57^\circ$ d) $22^\circ; 143^\circ; 15^\circ$

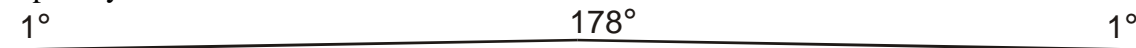
a) $65^\circ; 53^\circ; 62^\circ$

Součet: $65^\circ + 53^\circ + 62^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je obecný a ostroúhlý.



b) $178^\circ; 1^\circ; 1^\circ$

Součet: $178^\circ + 1^\circ + 1^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je rovnoramenný a tupouhlý.

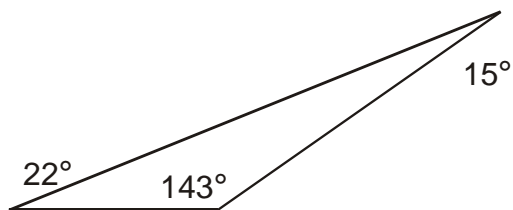


c) $43^\circ; 90^\circ; 57^\circ$

Součet: $43^\circ + 90^\circ + 57^\circ = 190^\circ \Rightarrow$ nejde o vnitřní úhly trojúhelníku.

d) $22^\circ; 143^\circ; 15^\circ$

Součet: $22^\circ + 143^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ jde o vnitřní úhly trojúhelníku, který je obecný a tupouhlý.



Pedagogická poznámka: Nakreslení trojúhelníku v bodu b) se ukazuje jako poměrně náročný oříšek, někteří žáci nakreslí jeden malý úhel, ale pro druhý už jim na stránce nezůstává místo a tak trojúhelník uzavřou třetí („svislou“) stranou čímž získají vlastně polovinu správného výsledku. Překvapivě časté jsou chyby i v bodu c), kde někteří žáci fakticky kontrolují pouze nulu na místě jednotek a shodu na místě desítek předpokládají automaticky.

Př. 4: Dopočti zbývající vnitřní úhel trojúhelníku.

a) $\alpha = 17^\circ, \beta = 86^\circ$

b) $\alpha = 57^\circ, \gamma = 93^\circ$

c) $\beta = 71^\circ 45', \gamma = 39^\circ 56'$

a) $\alpha = 17^\circ, \beta = 86^\circ$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180^\circ - 17^\circ - 86^\circ = 77^\circ$$

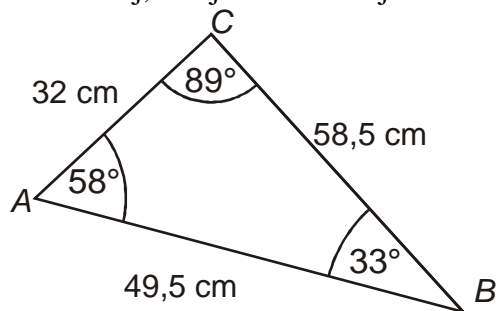
b) $\alpha = 57^\circ, \gamma = 93^\circ$

$$\beta = 180 - \alpha - \gamma = 180^\circ - 57^\circ - 93^\circ = 30^\circ$$

c) $\beta = 71^\circ 45', \gamma = 39^\circ 56'$

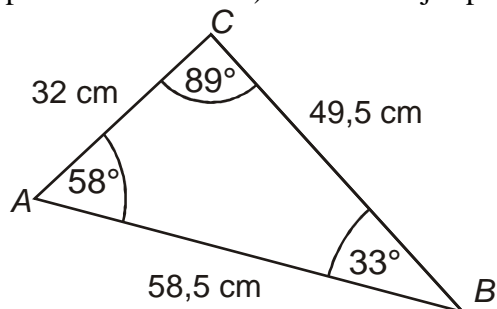
$$\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180^\circ - 71^\circ 45' - 39^\circ 56' = 180^\circ - 111^\circ 41' = 68^\circ 19'$$

Př. 5: Zkontroluj, zda je náčrtek trojúhelníku správný.

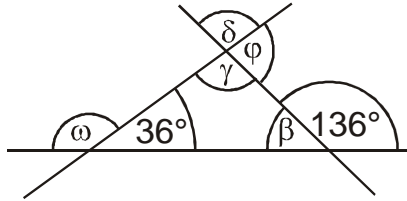


Součet úhlů: $58^\circ + 33^\circ + 89^\circ = 180^\circ$. V pořádku.

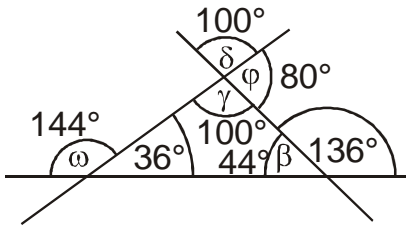
Neplatí, že větší strana musí ležet proti většímu úhlu (proti největšímu úhlu leží strana prostřední velikosti) \Rightarrow náčrtek je špatný.



Př. 6: Dopačítej velikosti vyznačených úhlů.



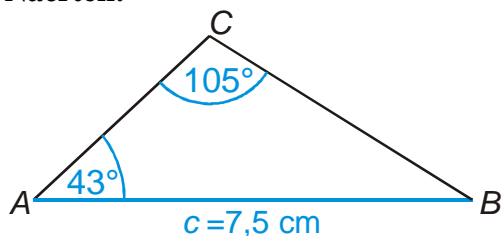
$\omega = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ (vnější úhel k vnitřnímu úhlu 36°)
 $\beta = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$ (vnitřní úhel k vnějšímu úhlu 136°)
 $\gamma = 180^\circ - 36^\circ - 44^\circ = 100^\circ$ (součet vnitřních úhlů v trojúhelníku)
 $\delta = \gamma = 100^\circ$ (vrcholové úhly)
 $\varphi = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (vnější úhel k vnitřnímu úhlu 100°)



Pedagogická poznámka: Na zbytek hodiny je třeba minimálně 15 minut, proto řešení předchozích příkladů přeruším.

Př. 7: Narýsuj trojúhelník ABC , pro který platí: $c = 7,5 \text{ cm}$, $\alpha = 43^\circ$, $\gamma = 105^\circ$. Začni náčrtekem. Sepiš i postup konstrukce.

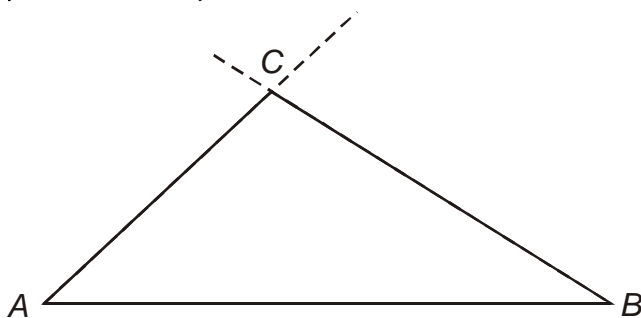
Náčrtek:



Problém: Snadno narýsujeme stranu c i úhel α , ale nevíme jak nakreslit úhel γ , protože když zvolíme vrchol úhlu na straně AC libovolně, nemusíme se druhým ramenem trefit do bodu B .

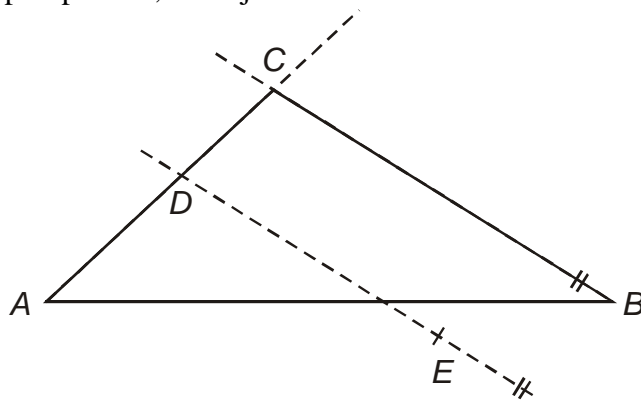
Řešení: Součet úhlů v trojúhelníku je 180° , známe dva úhly \Rightarrow můžeme dopočítat třetí a využít ho k narýsování trojúhelníku.

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 43^\circ - 105^\circ = 32^\circ$$



1. úsečka AB , $|AB| = 6 \text{ cm}$
2. úhel $\alpha = 43^\circ$
3. úhel $\beta = 32^\circ$
4. bod C

Jiné řešení: Vybereme si libovolný bod na přímce AC a narýsujeme úhel γ . Získáme tak polopřímku, která je určitě rovnoběžná se stranou $BC \Rightarrow$ bodem B vedeme rovnoběžku.



1. úsečka AB , $|AB| = 6 \text{ cm}$
2. úhel $\alpha = 43^\circ$
3. úhel $\sphericalangle ADE = \gamma = 105^\circ$
4. rovnoběžka s přímkou DE bodem B
5. bod C

Pedagogická poznámka: Vyřešit příklad dopočítáním třetího úhlu určitě někoho napadne. Se sestrováním rovnoběžky je to horší. Protože jde o ukázkou často používané metody, snažím se žákům k objevu dopomoci například tím, že zkusíme do náčrtku úhel dokreslit a bavíme se o tom, co se v takovém případě asi nepovede a čím by to šlo spravit.

Př. 8: Rovnoramenný trojúhelník má jeden z úhlů o velikosti 96° . Urči velikost zbývajících vnitřních úhlů.

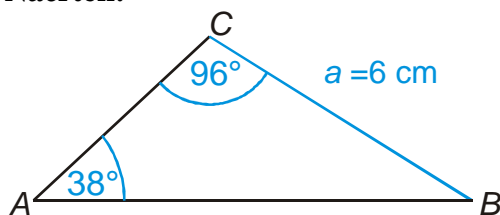
Rovnoramenný trojúhelník má dva shodné úhly. Zadaný úhel to být nemůže, protože je větší než 90° (a spolu s druhým shodným úhlem by měl součet větší než 180°).

Součet velikostí zbývajících dvou úhlů: $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$.

Zbývajících dva úhly jsou shodné \Rightarrow jejich velikost $84^\circ : 2 = 42^\circ$.

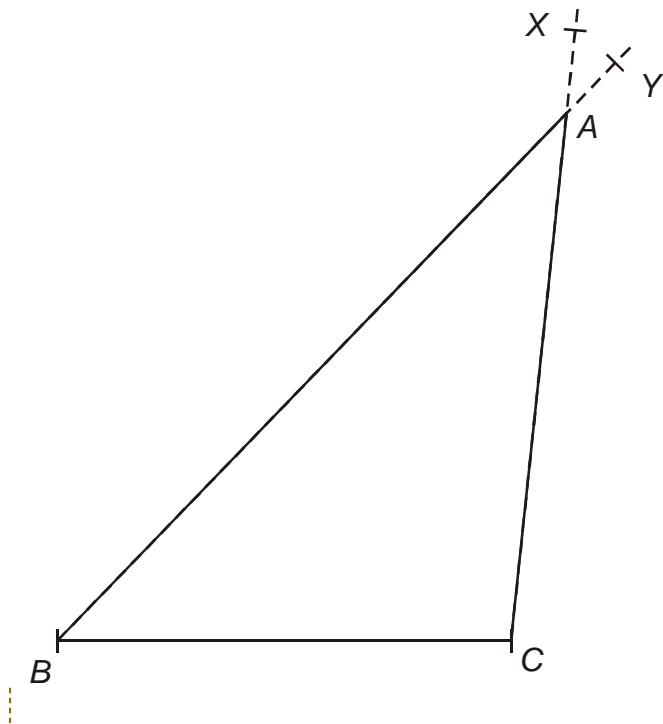
Př. 9: Narýsuj trojúhelník ABC , pro který platí: $a = 6 \text{ cm}$, $\gamma = 96^\circ$, $\alpha = 38^\circ$. Začni náčrtkem. Sepiš i postup konstrukce.

Náčrtek:



V podstatě stejné jako příklad 6 \Rightarrow řešíme stejným způsobem.

$$\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 96^\circ - 38^\circ = 46^\circ$$



1. úsečka BC , $|AB| = 6 \text{ cm}$
2. polopřímka CX , $|\sphericalangle BCX| = \gamma = 96^\circ$
3. polopřímka BY , $|\sphericalangle CBY| = \beta = 46^\circ$
4. bod A , průsečík polopřímek CX a BY
5. trojúhelník ABC

Shrnutí: