

## 1.7.9 Shodnost trojúhelníků

**Předpoklady:** 010708

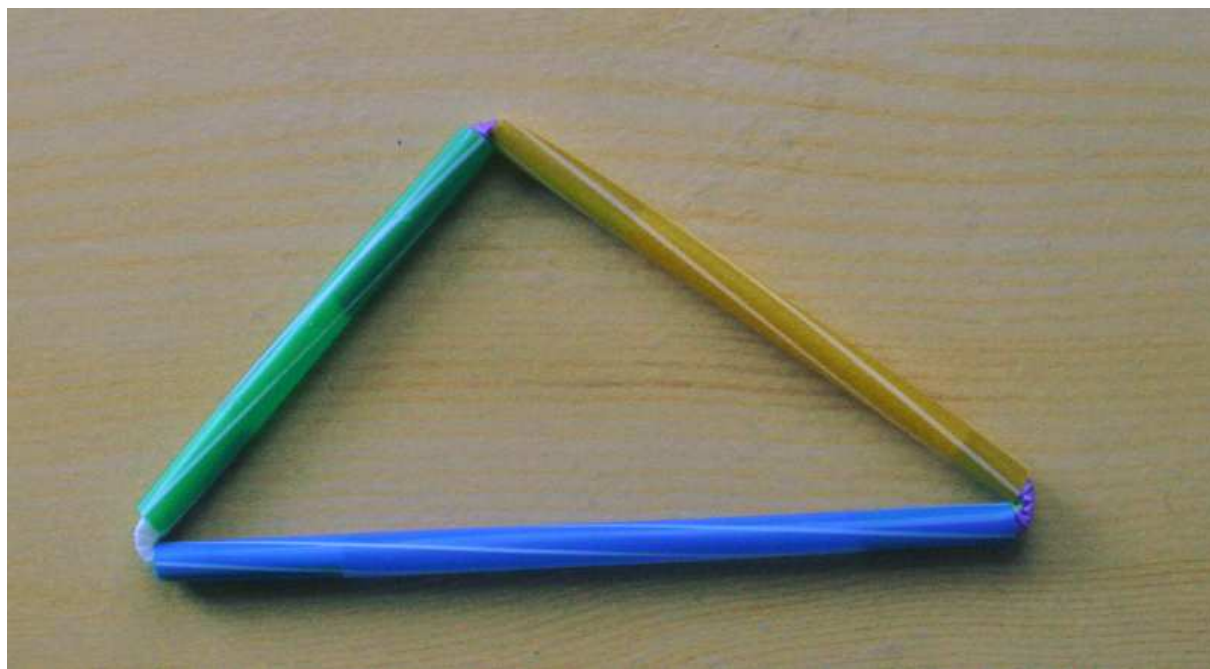
**Pedagogická poznámka:** V této a několika následujících hodinách využíváme brčkovou stavebnici. Základem jsou barevná nastříhaná brčka (jedna barva znamená jednu délku) většího průměru (kupováno 6 balení po 30 kusech), která se nasazují na nastříhaná ohebná kolínka o trochu tenčích brček (2 balení po 200 kusech). Balení je třeba trochu vybírat, barvy nebývají zastoupeny rovnoměrně, u kratších kousků vyrobíte z jednoho brčka dva dílky u delších jen jeden – proto je pro delší kousky nutné vybrat barvy, které jsou zastoupeny více.



Pokud se učíte doma a nechce se Vám kupovat brčka (ve škole bych vzhledem k zanedbatelným nákladům přípravu stavebnice velmi doporučoval), mohou je částečně zastoupit kousky špejlí nebo špaget. Toto řešení má dvě nevýhody: chybí barevné rozlišení stran podle délek a trojúhelníky nedrží pohromadě ani v příkladu 1, protože je jen pokládáte na papír (stavebnice z brček naopak doopravdy drží a trojúhelník z příkladu 1 je na rozdíl od čtyřúhelníku z příkladu 2 pevný).

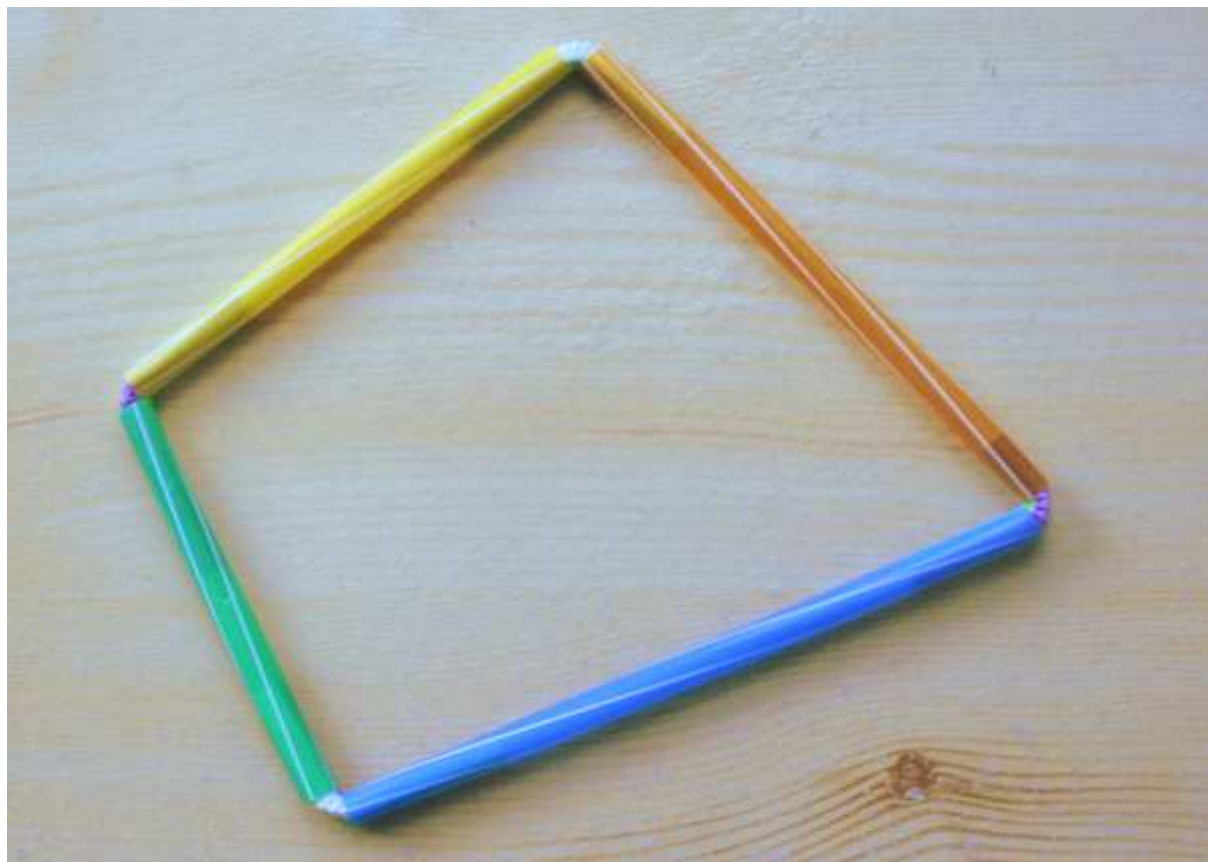
**Pedagogická poznámka:** Stavebnice, kterou dostanou děti do rukou samozřejmě způsobí v hodině trochu větší chaos než obvykle. Od příkladů 6 až 9 nic moc nečekám ani na nich netratíme moc času, čtvrt hodinu před koncem začneme s příkladem 10. Zadání v obou formách (*sus* i *usu*) nechám žáky napsat na podepsané papírky, které vyberu, každý žák si jeden vylosuje a po narýsování napíše na papírek zadání ve formě *sss*, které vrátí ke kontrole původnímu autorovi.

**Př. 1:** Z brček o délkách 7, 9, 12 cm sestav trojúhelník. Kolik máš možností jak trojúhelník sestavit? Je trojúhelník takto zadán jednoznačně?

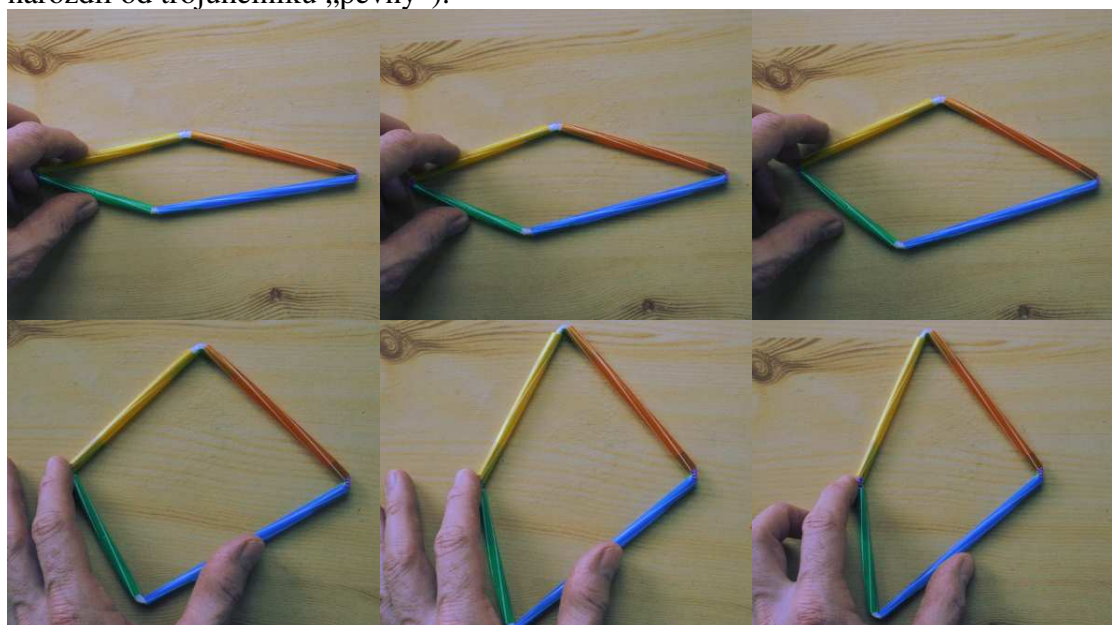


Všechny trojúhelníky, které takto sestavíme jsou shodné  $\Rightarrow$  trojúhelník zadaný třemi stranami je zadán jednoznačně.

**Př. 2:** Ke kouskům z předchozího příkladu přidej další o délce 10 cm a sestav čtyřúhelník, jehož strany mají postupně délky 7, 9, 10 a 12 cm. Kolik existuje možností jak čtyřúhelník sestavit?



Můžeme sestavit nekonečně mnoho různých čtyřúhelníků. Všechny mají stejný obvod (jsou sestaveny ze stejných dílků ve stejném pořadí), ale mají různé vnitřní úhly (čtyřúhelník není narozdíl od trojúhelníku „pevný“).



**Př. 3:** Kolik a jakých podmínek musíme přidat do zadání k délkám čtyř stran, aby byl čtyřúhelník zadán jednoznačně?

Stačí přidat jednu podmínku (velikost jednoho z úhlů nebo délku úhlopříčky) a čtyřúhelník bude zadán jednoznačně (už nebudeme mít možnost ho „natahovat“ do stran).

**Pedagogická poznámka:** Žáci častěji než úhlopříčku navrhnou těžnici nebo výšku (logické vzhledem k předchozím hodinám), takže se bavíme o tom, zda mají tyto pojmy pro čtyřúhelník smysl.

Všechny trojúhelníky, které sestrojíme, když máme zadány tři strany, jsou navzájem shodné  $\Rightarrow$  říkáme, že **trojúhelník zadáný třemi stranami je zadáný jednoznačně** (máme jen jednu možnost, jak jej narýsovat).

Větu můžeme použít i obráceně: **Pokud se dva trojúhelníky shodují ve třech stranách, jsou shodné  $\Rightarrow$  věta o shodnosti trojúhelníků sss.**

**Př. 4:** Co znamená zkratka *sss*?

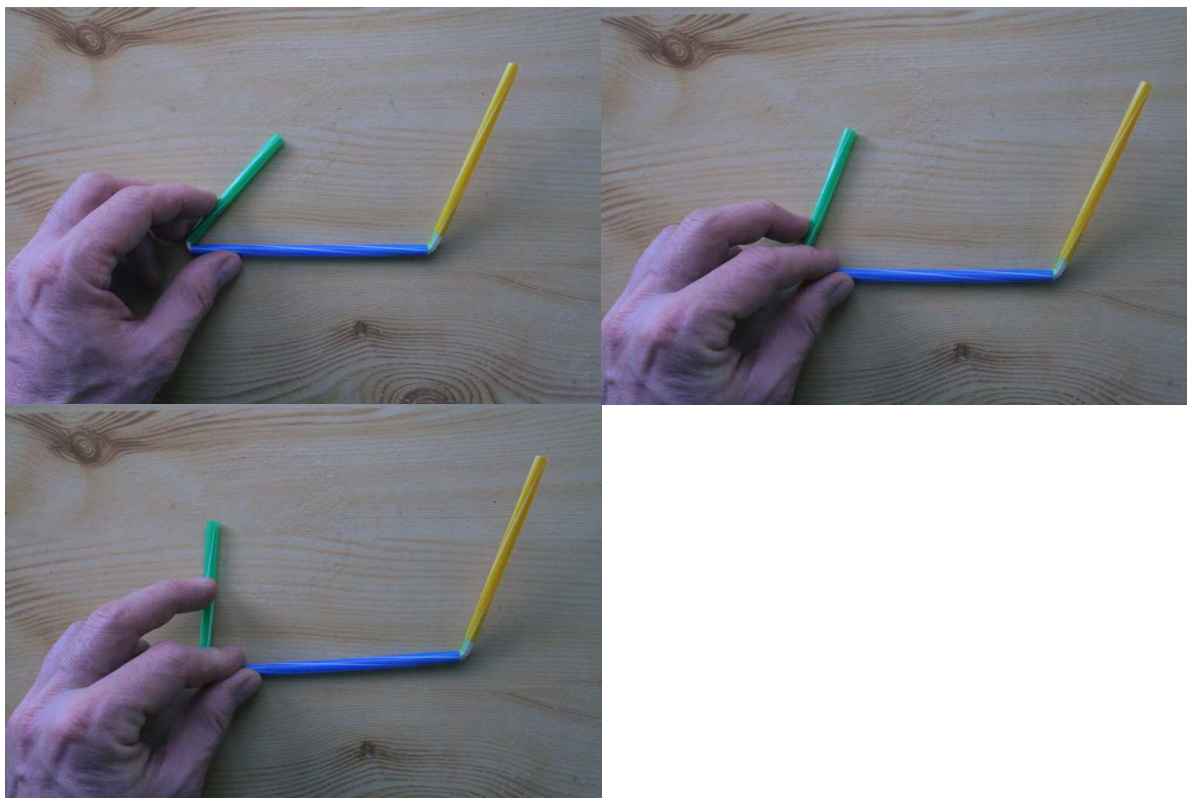
Zkratka znamená *strana, strana, strana* – tedy, že porovnáváme tři strany.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad se zdá samozřejmý, bohužel jsem zjistil, že značná část žáků vůbec nechápe, proč kružnice při rýsování trojúhelníků daných větou *sss* dělá. Což je kvůli následujícím konstrukcím, které využívají jiném množiny všech bodů dané vlastnosti docela problém.

**Př. 5:** Znovu z brček sestav trojúhelník o délkách 7, 9, 12 cm. Vrchol mezi stranami o délkách 7 a 9 nepropojuj spojkou. Vysvětli proč při konstrukci trojúhelníku *ABC* o stranách  $c = 12$  cm,  $b = 7$  cm a  $a = 9$  cm rýsuješ kružnice o poloměrech 9 cm a 7 cm.

Strana  $b$  má délku 7 cm  $\Rightarrow$  bod  $C$  musí ležet na konci zeleného brčka (ve vzdálenosti 7 cm od bodu  $A$ ), Když zelené brčko různě natáčíme, opisuje jeho konec kružnici o poloměru 7 cm  $\Rightarrow$  rýsujeme kružnici  $l(A; 7\text{cm})$  jako čáru, na které musí ležet bod  $C$ , aby byla splněna podmínka  $b = 7$  cm.





Strana  $a$  má délku 9 cm  $\Rightarrow$  bod  $C$  musí ležet na konci žlutého brčka (ve vzdálenosti 9 cm od bodu  $B$ ). Když žluté brčko různě natáčíme, opisuje jeho konec kružnici o poloměru 9 cm  $\Rightarrow$  rýsujeme kružnici  $k(B; 9\text{cm})$  jako čáru, na které musí bod  $C$  ležet, aby byla splněna podmínka  $a = 9$  cm.

Bod  $C$  musí splňovat obě podmínky  $\Rightarrow$  musí ležet na obou kružnicích  $\Rightarrow$  najdeme ho jako průsečík obou kružnic.

Pomocí brček můžeme modelovat i trojúhelníky, u kterých známe jeden z úhlů. Na papír si narýsujeme úhel požadované velikosti a brčka budeme přikládat k jeho ramenům.

**Př. 6:** Zkus pomocí brček a papíru se zakresleným úhlem zkonstruovat trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

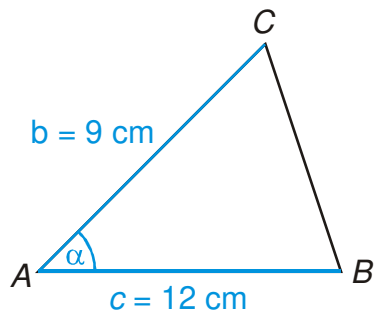
a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 9$  cm,  $c = 12$  cm

b)  $a = 7$  cm,  $\beta = 45^\circ$ ,  $c = 12$  cm

c)  $a = 7$  cm,  $b = 9$  cm,  $\gamma = 45^\circ$

U každé úlohy rozhodni, zda trojúhelník je zadán jednoznačně. Jak bys příklady rýsoval? Co mají úlohy společného?

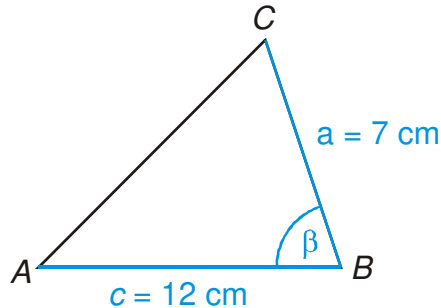
a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 9$  cm,  $c = 12$  cm



Trojúhelník je zadán jednoznačně. Návrh postupu:

1. strana  $c$
2. úhel  $\alpha$
3. strana  $b$

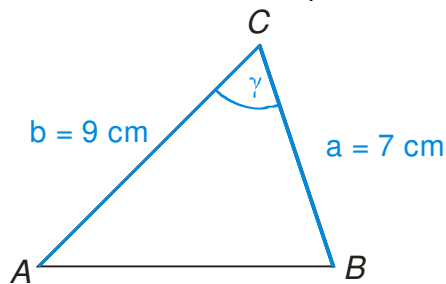
b)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $c = 12 \text{ cm}$



Trojúhelník je zadán jednoznačně. Návrh postupu:

1. strana  $c$
2. úhel  $\beta$
3. strana  $a$

c)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$



Trojúhelník je zadán jednoznačně. Návrh postupu:

1. strana  $a$
2. úhel  $\gamma$
3. strana  $b$

Ve všech bodech byl trojúhelník zadán jednoznačně.

Ve všech případech bychom mohli rýsovat podobně: nejdříve jednu stranu, poté úhel, a na druhém rameni úhlu druhou stranu.

Všechna zadání jsou velmi podobná, známe dvě strany trojúhelníku a úhel mezi nimi.

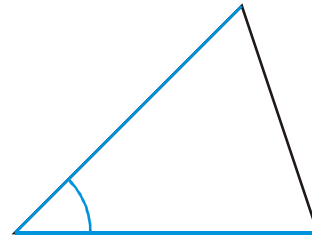
**Pedagogická poznámka:** U předchozího příkladu je trošku problém s tím, že trojúhelníkům chybí jedna strana. Dá se to řešit pomocí zbytků brček, které obsahují kloub (který je možné natahovat a tak získat potřebnou délku, ale prakticky tuto možnost nepoužíváme (maximálně při diskusi s žákem, který má velké problémy).

**Př. 7:** Všechny body předchozího příkladu odpovídají další větě o shodnosti trojúhelníků. Zkus ji vyslovit. Jak se bude označovat zkratkou?

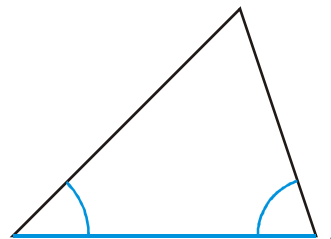
Věta o shodnosti trojúhelníků *sus*: Pokud se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu, který svírají, jsou shodné.

**Věta o shodnosti trojúhelníků *sus*: Pokud se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu, který svírají, jsou shodné**

**Př. 8:** Načrtni obrázek trojúhelníku bez označených vrcholů zadaného pomocí věty *sus*. Jak by vypadal obrázek trojúhelníku zadaného pomocí věty *usu*? Je takový trojúhelník zadaný jednoznačně?



Trojúhelník zadaný větou *sus* (dvě strany a úhel, který svírají).  
(na obrázku je jedna ze tří možností – máme tři úhly, ze kterých si můžeme vybrat)



Trojúhelník zadaný větou *usu* (strana a dva přilehlé úhly).  
(na obrázku je jedna ze tří možností – máme tři strany, ze kterých si můžeme vybrat)  
Trojúhelník je podle věty *usu* určitě zadaný jednoznačně: ramena úhlů vycházejí z krajních bodů zadané strany  $\Rightarrow$  je dané, kde se musí potkat.

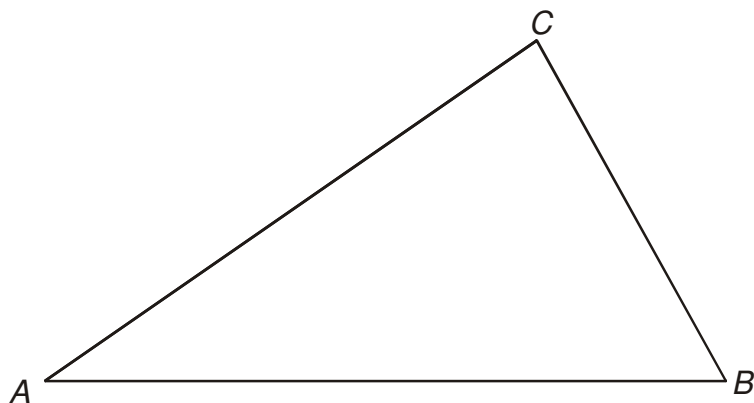
**Př. 9:** Vyslov větu *usu*.

Věta o shodnosti trojúhelníků *usu*: Pokud se dva trojúhelníky shodují v straně a přilehlých úhlech, jsou shodné.

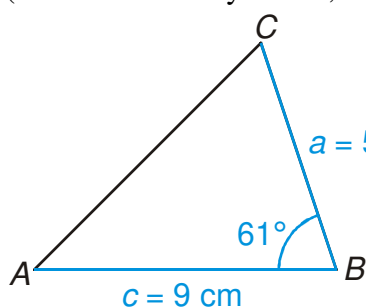
**Věta o shodnosti trojúhelníků *usu*: Pokud se dva trojúhelníky shodují ve straně a přilehlých úhlech, jsou shodné.**

**Př. 10:** Narýsuj libovolný obecný trojúhelník. Změř potřebné velikosti a zadej jeho narýsování sousedovi:  
a) pokud sedíš v lavici vlevo pomocí věty *sus*,  
b) pokud sedíš v lavici vpravo pomocí věty *usu*.  
Až soused rýsování dokončí zkontroluj, zda jsou oba trojúhelníky shodné pomocí věty *sss*.

Libovolný trojúhelník *ABC*.

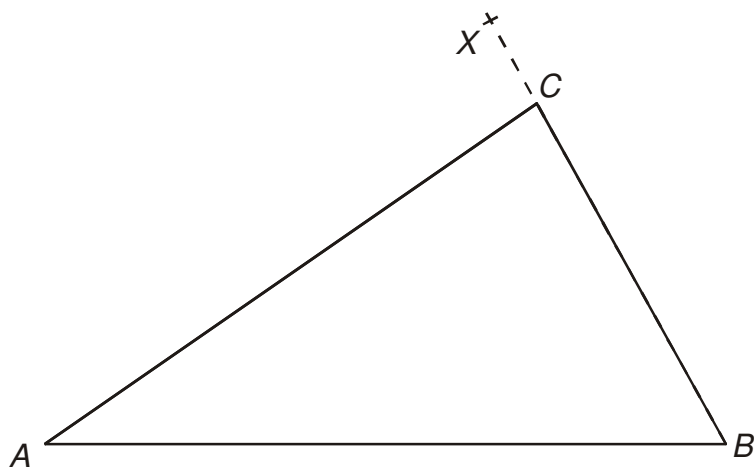


a) zadání trojúhelníku pomocí věty *sus* :  $c = 9 \text{ cm}$  ,  $\beta = 61^\circ$  ,  $a = 5,1 \text{ cm}$   
 (další dvě varianty:  $a = 5,1 \text{ cm}$  ,  $\gamma = 84^\circ$  ,  $b = 7,9 \text{ cm}$  nebo  $b = 7,9 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 35^\circ$  ,  $c = 9 \text{ cm}$  )



Návrh postupu:

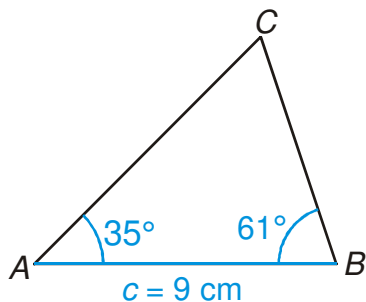
1. strana  $c$
2. úhel  $\beta$
3. strana  $a$



Postup konstrukce:

1. úsečka  $AB$  ,  $|AB| = c = 9 \text{ cm}$
2. polopřímka  $BX$  ,  
 $|\sphericalangle ABX| = \beta = 61^\circ$
3. bod  $C$  leží na polopřímce  $BX$  ,  
 $|BC| = a = 5,1 \text{ cm}$
4. trojúhelník  $ABC$

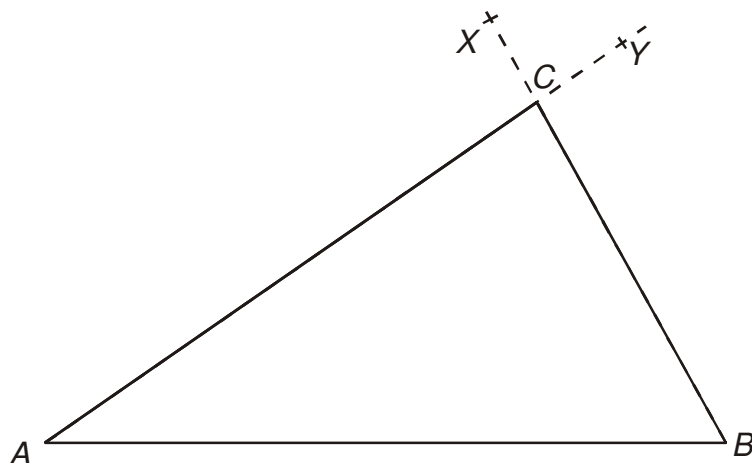
b) zadání trojúhelníku pomocí věty *usu* :  $\alpha = 35^\circ$  ,  $c = 9 \text{ cm}$  ,  $\beta = 61^\circ$   
 (další dvě varianty:  $\beta = 61^\circ$  ,  $a = 5,1 \text{ cm}$  ,  $\gamma = 84^\circ$  nebo  $\gamma = 84^\circ$  ,  $b = 7,9 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 35^\circ$  )



Návrh postupu:

1. strana  $c$
2. úhel  $\beta$
3. úhel  $\alpha$
4. bod  $C$
5. trojúhelník  $ABC$





Postup konstrukce:

1. úsečka  $AB$ ,  $|AB| = c = 9 \text{ cm}$
2. polopřímka  $BX$ ,  
 $|\sphericalangle ABX| = \beta = 61^\circ$
3. polopřímka  $AY$ ,  
 $|\sphericalangle BAY| = \alpha = 35^\circ$
4. bod  $C$  průsečík polopřímek  $BX$  a  $AY$
5. trojúhelník  $ABC$

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad je zabavením pro nejrychlejší. Příkladem se dále zabýváme na začátku další hodiny.

**Př. 11:** Modeluj pomocí brček a úhlu nakresleného na papíře trojúhelník zadaný větou *ssu*. Využij například úhel  $45^\circ$  a špejle o délkách 9 a 12 cm. Záleží na tom, která ze špejlí představuje stranu ležící na rameni úhlu? Je trojúhelník zadan jednoznačně?

**Shrnutí:**