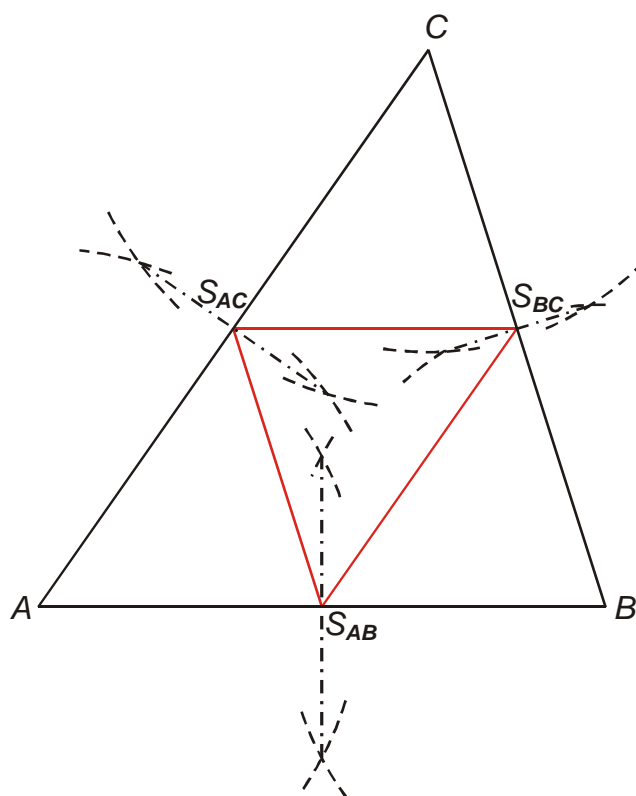


1.7.12 Střední příčky trojúhelníku

Předpoklady: 010711

Př. 1: Narýsuj libovolný trojúhelník ABC (zvol ho tak, aby se co nejvíce lišil od trojúhelníku, který narýsoval soused). Najdi středy všech stran S_{AB} , S_{BC} a S_{AC} . Spoj tyto body úsečkami. Najdi všechny zajímavé rysy narýsovaného obrázku.



- Trojúhelník ABC se rozdělil na čtyři stejné menší trojúhelníky:
 $AS_{AB}S_{AC}$, $S_{AB}BS_{BC}$, $S_{BC}S_{AC}S_{AB}$, $S_{AC}S_{BC}C$,
- úsečky, které vznikly spojením narýsovaných středů, jsou rovnoběžné s protějšími stranami trojúhelníku,
- úsečky, které vznikly spojením narýsovaných středů, mají poloviční délku než protější strany trojúhelníku,
- vzniklé trojúhelníky mají stejný tvar jako původní trojúhelník ABC , mají poloviční délku stran,
- ...

Všechny postřehy platí pro libovolný trojúhelník \Rightarrow zřejmě jde o obecnou vlastnost všech trojúhelníků.

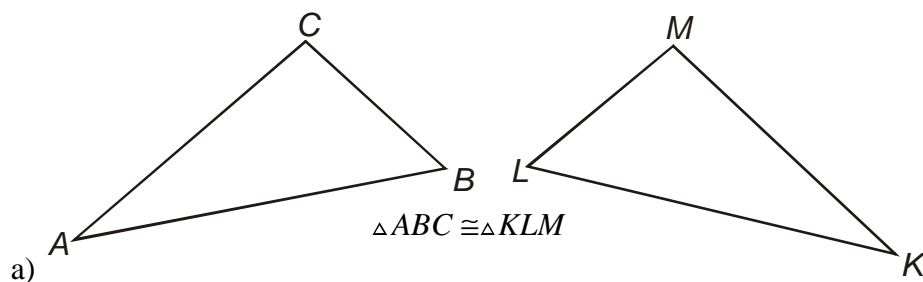
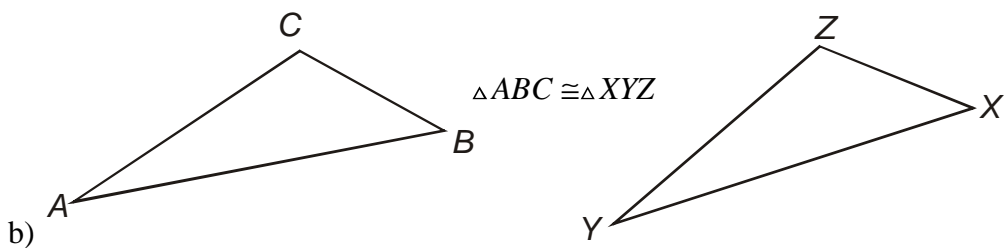
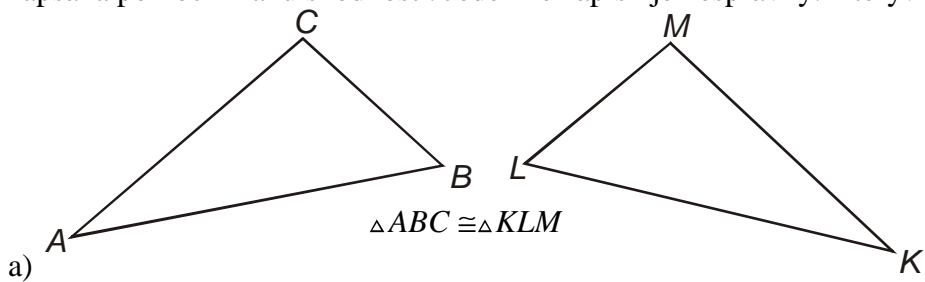
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je cvičením všímavosti, čím víc postřehů, tím lépe.

Př. 2: Vysvětli, proč je úsečka $S_{AB}S_{BC}$ označována jako střední příčka.

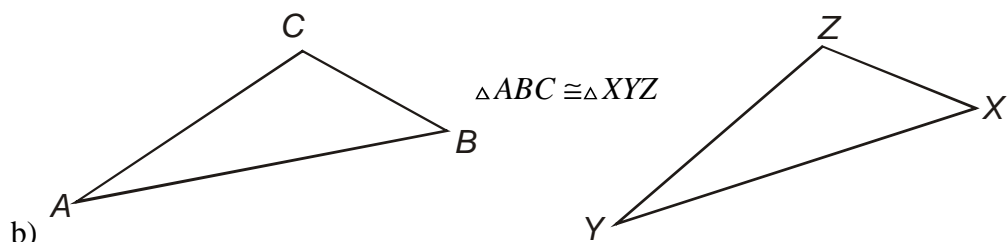
Střední – spojuje středy dvou stran.

Příčka – jde napříč trojúhelníkem.

Př. 3: Na obrázku jsou dvě dvojice shodných trojúhelníků, u každé dvojice je shodnost zapsána pomocí znaku shodnosti. Jeden ze zápisů je nesprávný. Který? Proč?

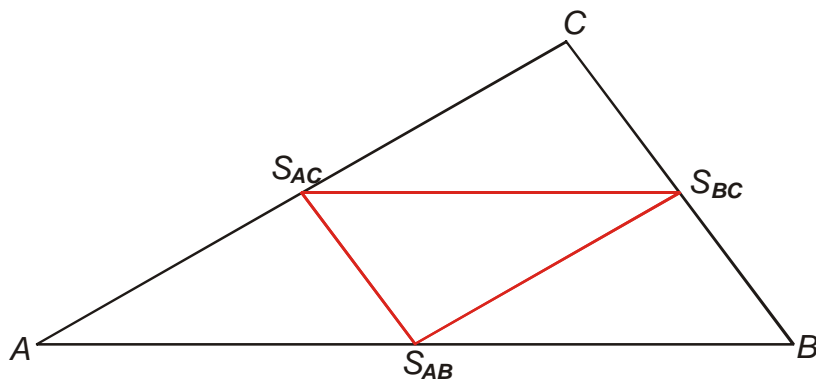


Správný zápis, body jsou uvedeny v pořadí, ve kterém si odpovídají (vrcholy A, K leží u nejmenšího úhlu, vrcholy B, L u středního úhlu a vrcholy C, M u největšího úhlu).



Špatný zápis, bodu A (leží u nejmenšího úhlu) je přiřazen bod X (leží u prostředního úhlu), bodu B (leží u prostředního úhlu) je přiřazen body Y (leží u nejmenšího úhlu). Správný zápis: $\triangle ABC \cong \triangle YXZ$.

Př. 4: Načrtni libovolný trojúhelník ABC , označ středy jeho stran a dokresli střední příčky. Zapiš shodnost menších trojúhelníků (které vrcholy jednotlivých trojúhelníků si odpovídají).



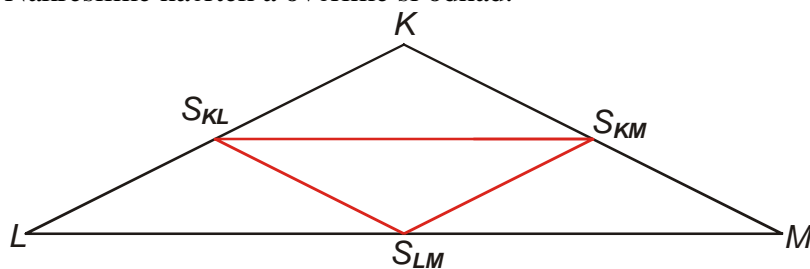
Při zápisu shodnosti budeme vrcholy trojúhelníků zapisovat podle velikostí úhlů v pořadí nejmenší, prostřední, největší úhel: $\triangle AS_{AB}S_{AC} \cong \triangle S_{AB}BS_{BC} \cong \triangle S_{AC}S_{BC}C \cong \triangle S_{BC}S_{AC}S_{AB}$.

Pedagogická poznámka: Rozhodující pro úspěch při řešení předchozího příkladu je nakreslený obrázek. Pro žáky, kteří načrtnou rovnostranné (rovnoramenné) trojúhelníky, je řešení daleko těžší (spíš nemožné). Neupozorňuji na to dopředu (mluvili jsme o tom už v minulých hodinách), ale zmiňujeme to při kontrole příkladu.

Př. 5: Je dán rovnooramenný trojúhelník KLM se základnou LM . Které strany jsou shodné? Které střední příčky jsou shodné?

Pokud je základnou strana LM , musí být u rovnooramenného trojúhelníku shodné zbývající strany KL a KM . Neshodnou střední příčkou bude úsečka $S_{KL}S_{KM}$, která je rovnoběžná se základnou $LM \Rightarrow$ shodné jsou střední příčky $S_{LM}S_{KM}$ a $S_{LM}S_{KL}$.

Nakreslíme náčrtek a ověříme si odhad.



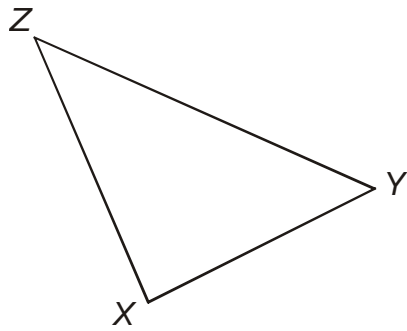
Z obrázku je zřejmé, že náš odhad byl správný:

- shodné strany: KL a KM ,
- shodné střední příčky $S_{LM}S_{KM}$ a $S_{LM}S_{KL}$.

Pedagogická poznámka: Opět dopředu neříkáme, že je dobré kreslit obrázky a jak mají vypadat. Při kontrole je samozřejmě využíváme.

Př. 6: Narýsuj libovolný trojúhelník XYZ . Narýsuj trojúhelník ABC takový, aby strany trojúhelníku XYZ byly střední příčky trojúhelníku ABC .

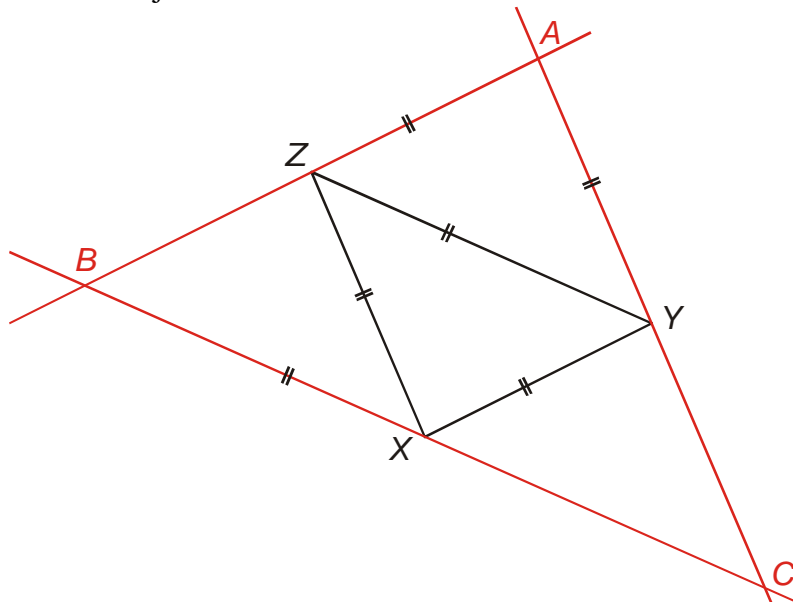
Libovolný trojúhelník XYZ



Střední příčky jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku, krajní body jsou středy stran \Rightarrow

- strana AB je rovnoběžná se stranou YZ ,
- strana AB prochází bodem X ,

\Rightarrow přímky, na které leží strana AB získáme tím, že bodem X narýsujeme rovnoběžku se stranou YZ . Pokud podobné rovnoběžky narýsujeme i přes zbývající body trojúhelníku XYZ , získáme trojúhelník ABC .



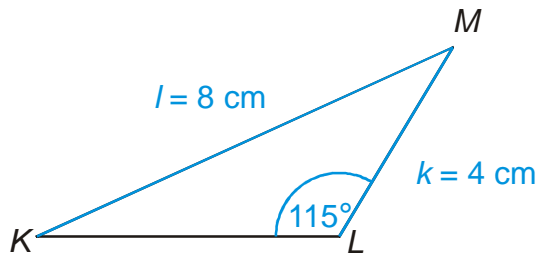
Př. 7: Kolikrát větší jsou strany trojúhelníka ABC než strany trojúhelníka středních příček? Kolikrát větší je jeho obsah trojúhelníka ABC než obsah trojúhelníka středních příček? Kde jsme se s podobnou situací už setkali?

Strany trojúhelníku ABC jsou dvakrát delší než strany trojúhelníku středních příček, obsah trojúhelníku je ABC je čtyřikrát větší než obsah trojúhelníku středních příček (trojúhelník ABC je rozdělený na čtyři shodné trojúhelníky).

S podobnou situací jsme se setkali u převodů jednotek plochy (platí $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, i když $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, protože $1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$).

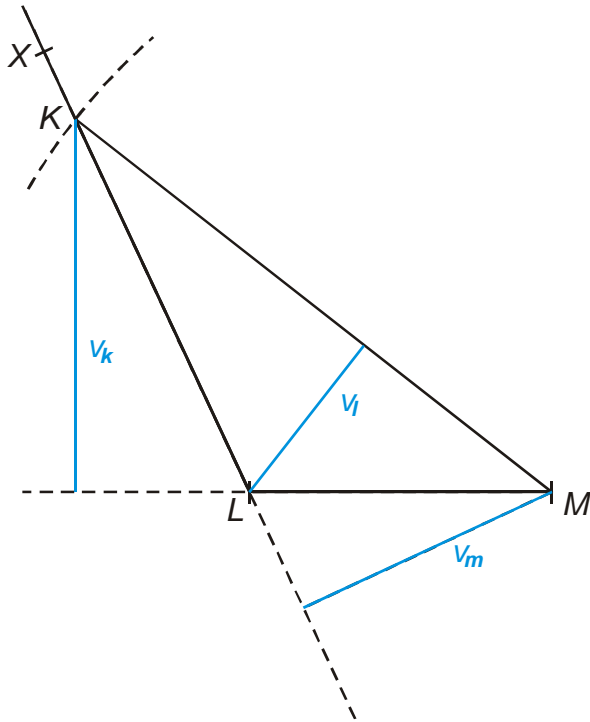
Př. 8: Narýsuj trojúhelník KLM , $k = 4 \text{ cm}$, $\sphericalangle KLM = 115^\circ$, $l = 8 \text{ cm}$. Narýsuj všechny jeho výšky. Sestroj jeho obraz v osové souměrnosti podle přímky, na které leží výška v_k .

Náčrtek



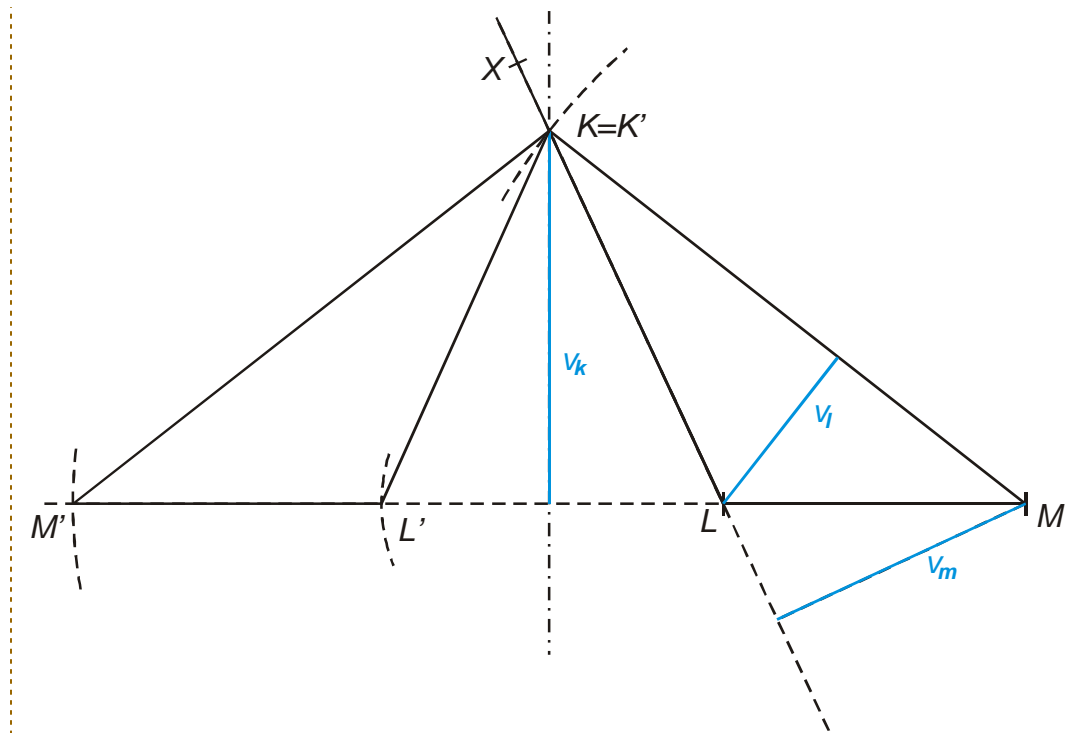
Návrh postupu:

1. strana LM
2. úhel $|\sphericalangle KLM| = 115^\circ$
3. kružnice $k(M; l = 8 \text{ cm})$, kvůli straně l
4. průsečík kružnice s ramenem úhlu je bod K
5. trojúhelník KLM



1. úsečka LM , $|LM| = k = 4 \text{ cm}$
2. polopřímka LX , $|\sphericalangle MLX| = 115^\circ$
3. kružnice $k(M; l = 8 \text{ cm})$
4. bod K průsečík kružnice k a polopřímky LX
5. trojúhelník KLM
6. výšky trojúhelníku

Přímku, na které leží výška v_k vytáhneme a sestrojíme obraz trojúhelníku KLM v osové souměrnosti s touto osou (bod K se zobrazí sám na sebe).



Shrnutí: Střední příčky spojující středy stran rozdělí trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky o poloviční délce stran.