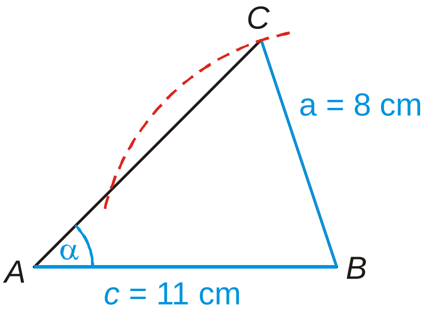
1.7.13 Konstrukce trojúhelníků V (opakování)

Předpoklady: 010712

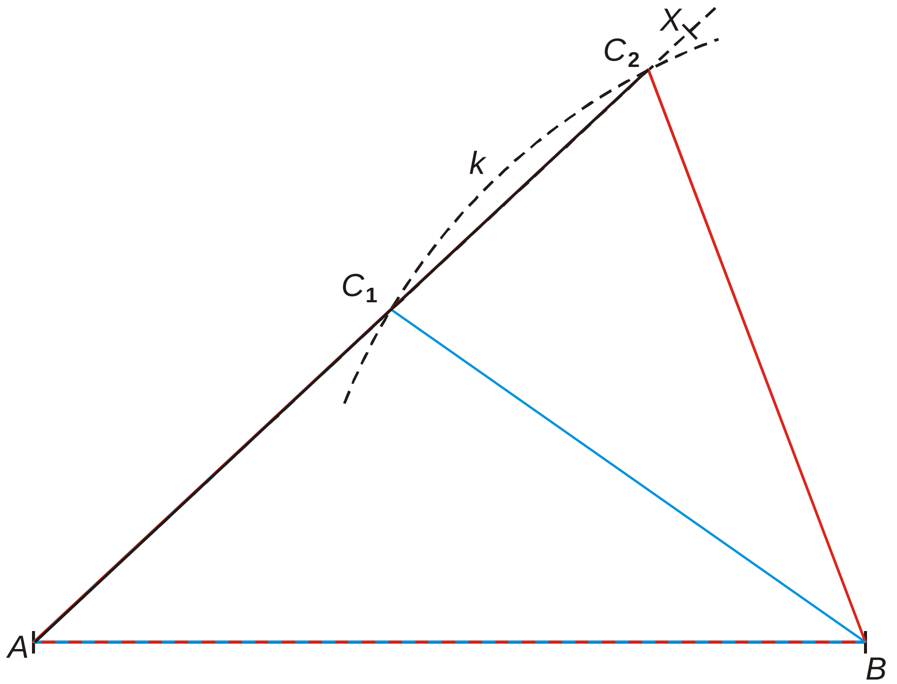
Pedagogická poznámka: Hodinu je možné zadat jako klasickou skupinovou prací (skupiny se snaží do konce hodiny narýsovat co největší počet trojúhelníků) nebo jako hru (v takovém případě je nutné mít dvě hodiny co nejblíže - nejlépe ihned - po sobě). V první hodině skupiny dostanou zadání trojúhelníků (výsledkem každé dvojice zadání je vzdálenost a úhel, tedy souřadnice bodu v rovině, pokud zadání obsahuje nejednoznačně zadaný trojúhelník je souřadnic více). V druhé hodině pak každá skupina může určené souřadnice použít k určení bodu, kde leží poklad. Na naší škole jsme využili dlaždice, takže každé souřadnice určovali jednu dlaždici, na kterou skupina měla umístit totem a pak zavolat kouzelný výtah, který buď přivezl nebo nepřivezl poklad (nanukový dort). Stačilo si zapamatovat výherní dlaždice a se spolupracovníky ve vyšším patře domluvit signál (například ruka v kapse ano, ruce mimo kapsy ne), podle kterého měli nebo neměli dorty do výtahu umístit. Chybou v realizaci bylo, že první a druhou hodinu dělilo několik dní, takže ačkoliv při první hodině (kdy vlastně o moc nešlo, protože odměna byla vzdálená a velmi neurčitá) velká většina žáků celou hodinu pracovala, v druhé hodině si většina z nich výsledky rýsování nepřinesla a třída nebyla schopná se domluvit na jakékoliv použitelné strategii.

Př. 1: Místo (místa), kde se nachází část pokladu, najdeš z výchozího bodu a směru takto:
a) $a = 8,5\ \text{cm}$, $\alpha = 43°$, $c = 11\ \text{cm}$ $\Rightarrow b$
b) $t_b = 8,5\ \text{cm}$, $v_b = 6\ \text{cm}$, $b = 10\ \text{cm}$ $\Rightarrow \beta$
Nezapomeň, že hodinové ručičky se otáčejí na odečítací stranu.
U každé úlohy si rozmysli, zda je trojúhelník (a tedy i poloha části pokladu) zadán jednoznačně. Pokud si nebudeš vědět rady, namodeluj situaci pomocí brček.

a) $a = 8\ \text{cm}$, $\alpha = 45°$, $c = 11\ \text{cm}$



Náčrtek:
Nejdříve sestrojíme stranu *c*, pak úhel α, vrchol *C* budeme hledat jako průsečík ramene úhlu a kružnice $k(B; 8,5\ \text{cm})$ (dají se očekávat dvě řešení).

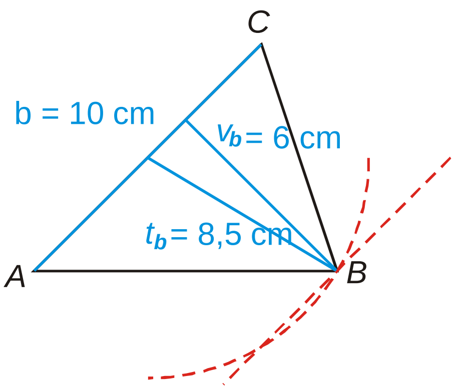


Postup konstrukce:

1. strana *AB*, $|AB| = c = 11\,\text{cm}$
2. bod *X*, $|\sphericalangle BAX| = \alpha = 43°$
3. kružnice $k\left(A; t_a : 3 \cdot 2 = 6\,\text{cm}\right)$
4. bod *C*, průsečík polopřímky *AX* s kružnicí *k*
5. trojúhelník *ABC*

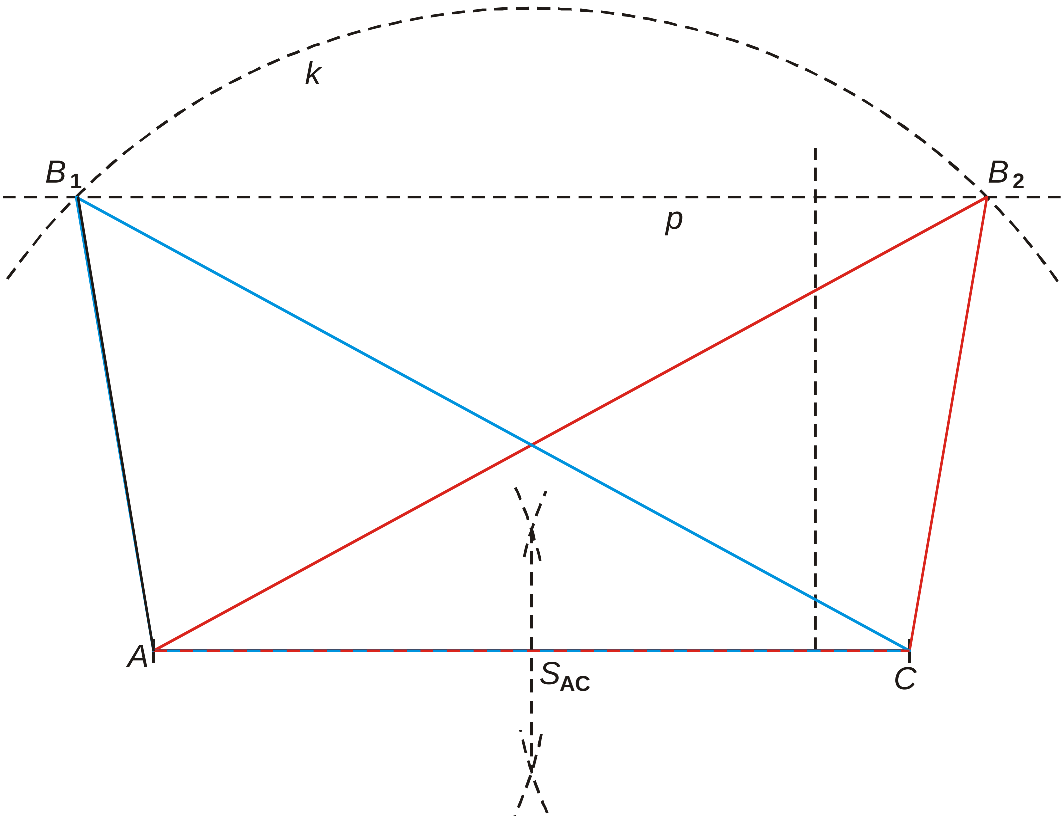
Konstrukce není jednoznačná $\Rightarrow$ dvě možné velikosti strany *b*: $b_1 = 6{,}4\ \text{cm}$, $b_2 = 11{,}1\ \text{cm}$.

b) $t_b = 8{,}5\ \text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$



Náčrtek:

Nejdříve sestrojíme stranu *b*, vrchol *C* najdeme pomocí rovnoběžky se stranou *AC* ve vzdálenosti $v_b = 6\,\text{cm}$ (využití velikosti výšky, vrchol *B* je od strany vzdálen 6 cm) a kružnice $k\left(S_{AC}; 8{,}5\ \text{cm}\right)$ (využití velikosti těžnice, vrchol *B* je od středu strany *AC* vzdálen 8,5 cm) (dají se očekávat dvě řešení).



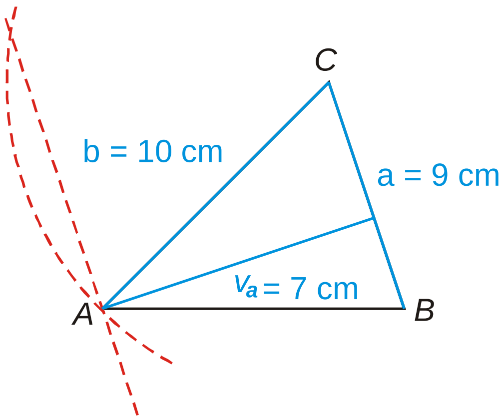
Postup konstrukce:

1. strana AC, $|AC| = b = 10\,\text{cm}$
2. přímka p, $p \parallel AC$ ve vzdálenosti 6 cm
3. kružnice $k(S_{AC}; t_b = 8{,}5\,\text{cm})$
4. bod C, průsečík přímky p s kružnicí k
5. trojúhelník ABC

Příklad má dvě řešení, u obou je velikost úhlu β stejná - $52°$.

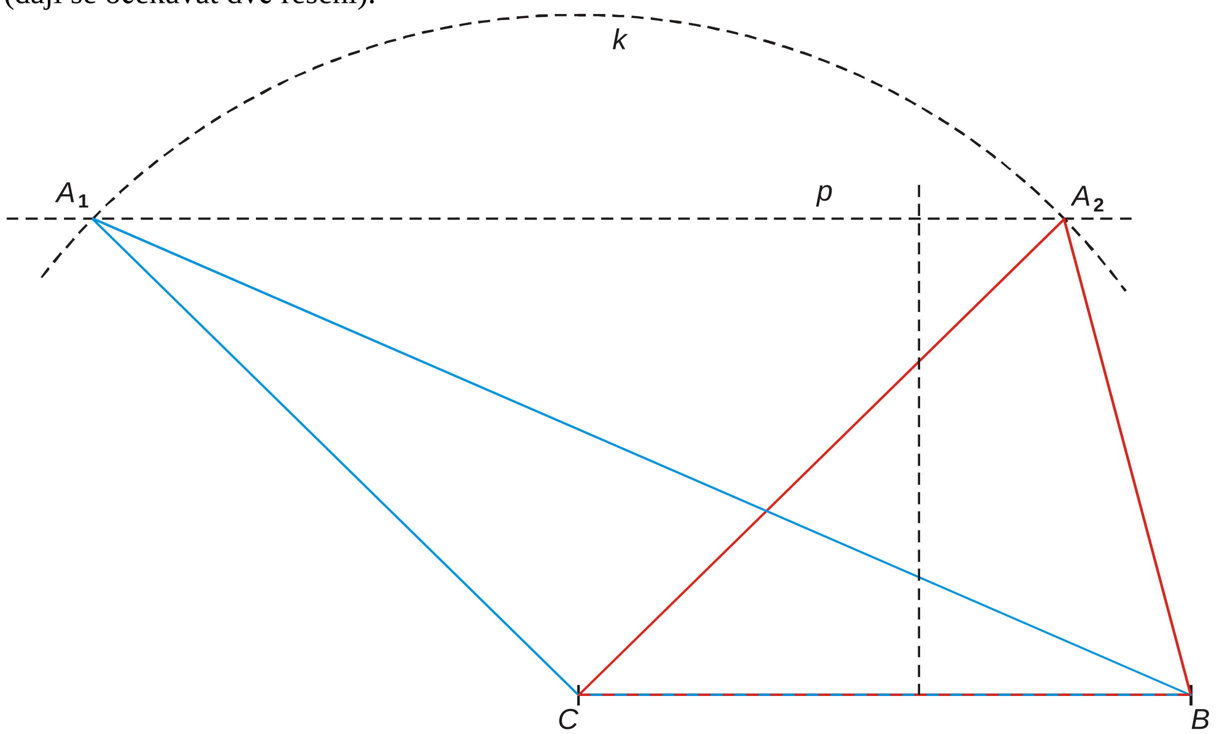
Př. 2: Místo (místa), kde se nachází část pokladu, najdeš z výchozího bodu a směru takto:
a) $a = 9\,\text{cm}$, $v_a = 7\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm} \Rightarrow t_a$
b) $b = 7\text{cm}$, $t_a = 9\,\text{cm}$, $a = 10\,\text{cm} \Rightarrow -\beta$
Nezapomeň, že hodinové ručičky se otáčejí na odečítací stranu.
U každé úlohy si rozmysli, zda je trojúhelník (a tedy i poloha části pokladu) zadán jednoznačně. Pokud si nebudeš vědět rady, namodeluj situaci pomocí brček.

a) $a = 9\,\text{cm}$, $v_a = 7\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$



Náčrtek:

Nejdříve sestrojíme stranu *a*, vrchol *A* najdeme pomocí rovnoběžky se stranou *BC* ve vzdálenosti $v_a = 7\,\mathrm{cm}$ (využití velikosti výšky, vrchol *A* je od strany *BC* vzdálen 7 cm) a kružnice $k(C; 10\,\mathrm{cm})$ (využití velikosti strany *b*, vrchol *A* je od vrcholu *C* vzdálen 10 cm) (dají se očekávat dvě řešení).

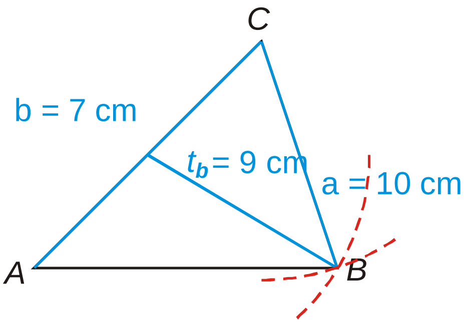


Postup konstrukce:

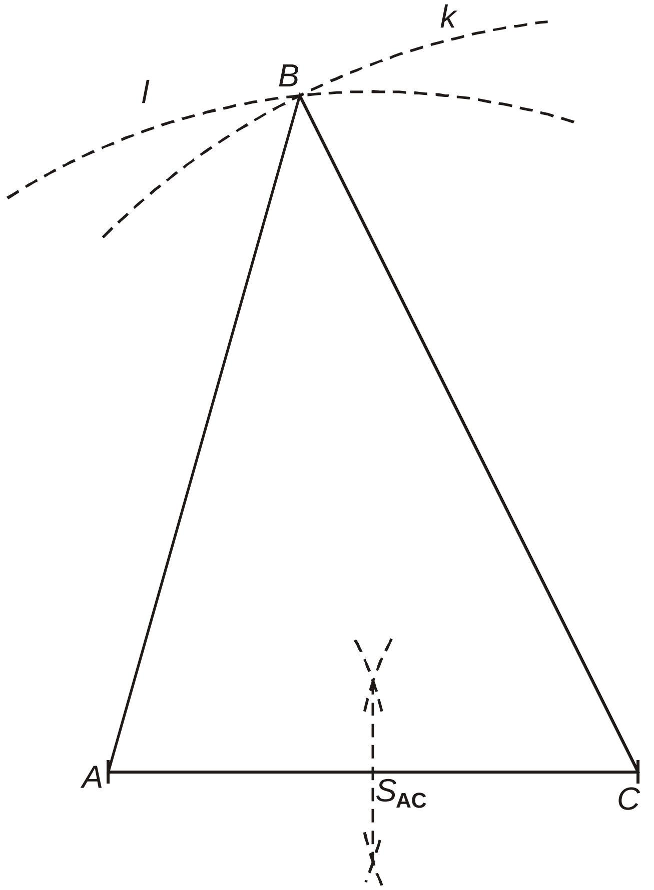
1. strana *BC*, $|BC| = a = 9\,\mathrm{cm}$
2. přímka *p*, $p \parallel BC$ ve vzdálenosti 7 cm
3. kružnice $k(C; b = 10\,\mathrm{cm})$
4. bod *A*, průsečík přímky *p* s kružnicí *k*
5. trojúhelník *ABC*

Příklad má dvě řešení s dvěma různými délkami těžnice t_a: $t_{a1} = 7{,}3\,\mathrm{cm}$, $t_{a2} = 13{,}6\,\mathrm{cm}$.

b) $b = 7\mathrm{cm}$, $t_a = 9\,\mathrm{cm}$, $a = 10\,\mathrm{cm}$



Náčrtek:
Nejdříve sestrojíme stranu b, vrchol B najdeme pomocí kružnice $k(C;10\text{ cm})$ (využití velikosti strany a, vrchol B je od vrcholu C vzdálen 10 cm) a kružnice $k(S_{AC};9\text{ cm})$ (využití velikosti těžnice t_b, vrchol B je od středu strany AC vzdálen 9 cm).

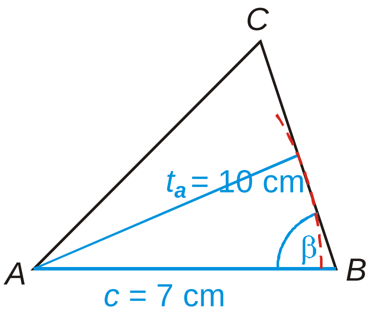


Postup konstrukce:
1. strana AC, $|AC| = b = 7\text{ cm}$
2. kružnice $k(C; b = 10\text{ cm})$
3. kružnice $l(S_{AC}; t_b = 9\text{ cm})$
4. bod B, průsečík kružnic k a l
5. trojúhelník ABC

Příklad má jedno řešení, pro velikost úhlu β platí $\beta = 42°$.

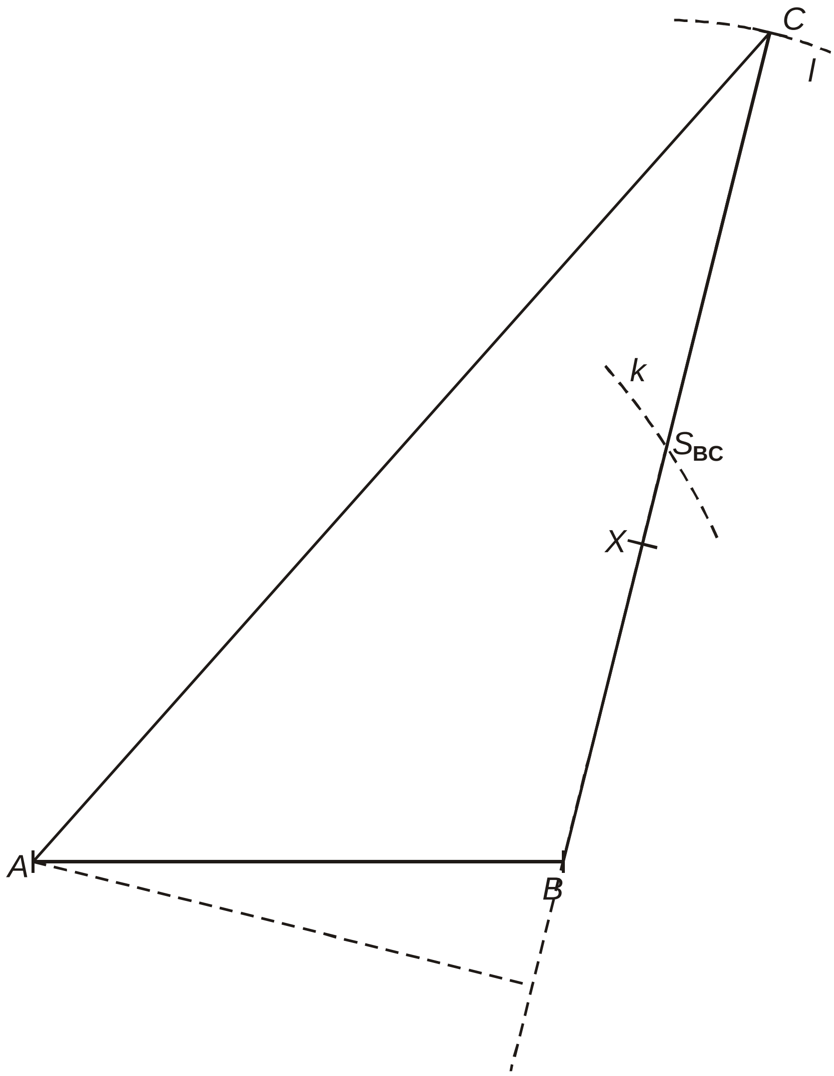
Př. 3: Místo (místa), kde se nachází část pokladu, najdeš z výchozího bodu a směru takto:
a) $t_a = 10\text{ cm}$, $\beta = 104°$, $c = 7\text{ cm}$ $\Rightarrow$ v_a
b) $b = 9\text{ cm}$, $t_c = 7{,}2\text{ cm}$, $t_a = 9\text{ cm}$ $\Rightarrow$ γ
Nezapomeň, že hodinové ručičky se otáčejí na odečítací stranu.
U každé úlohy si rozmysli, zda je trojúhelník (a tedy i poloha části pokladu) zadán jednoznačně. Pokud si nebudeš vědět rady, namodeluj situaci pomocí brček.

a) $t_a = 10\text{ cm}$, $\beta = 104°$, $c = 7\text{ cm}$



Náčrtek:

Nejdříve sestrojíme stranu c, pomocí kružnice $k(A; 10\,\text{cm})$ (využití velikosti strany těžnice t_a, střed strany BC je od vrcholu A vzdálen 10 cm) a ramene úhlu β.

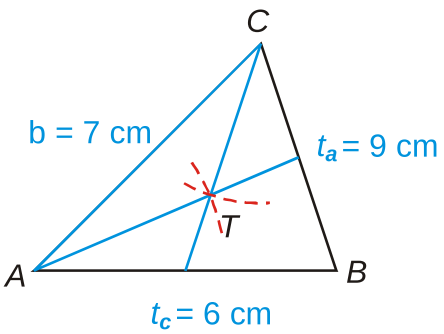


Postup konstrukce:

1. strana AB, $|AB| = c = 7\,\text{cm}$
2. bod X, $|\sphericalangle ABX| = \beta = 104°$
3. kružnice $k(A; t_a = 10\,\text{cm})$
4. bod S_{BC} průsečík kružnice k s polopřímkou BX
5. kružnice $l(S_{BC}; |S_{BC}B|)$
6. bod C, průsečík kružnice l a polopřímky BX
7. trojúhelník ABC

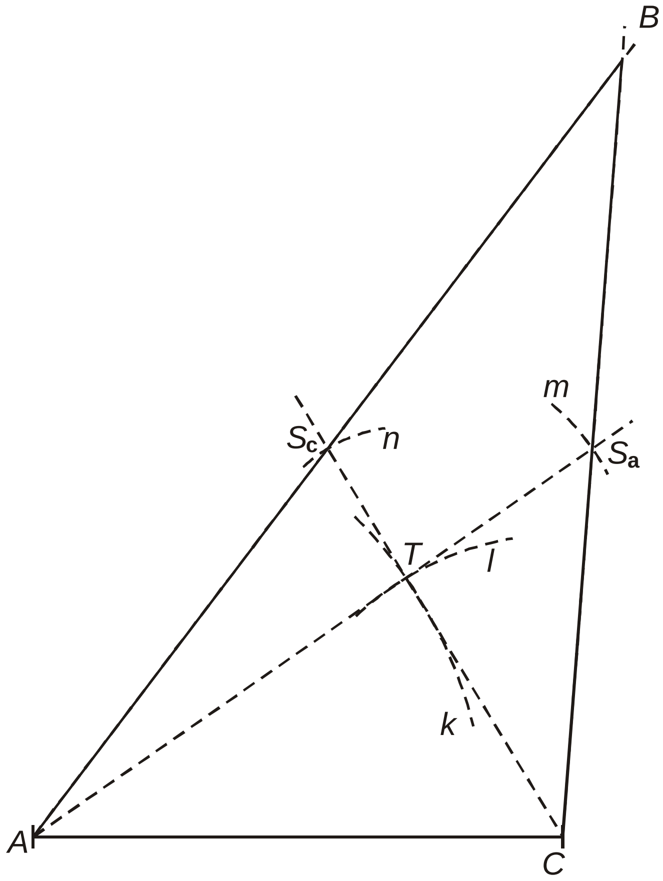
Příklad má jedno řešení, pro velikost výšky v_a platí: $v_a = 6{,}8\,\text{cm}$.

b) $b = 7\,\text{cm}$, $t_c = 6\,\text{cm}$, $t_a = 9\,\text{cm}$



Náčrtek:

Nemůžeme sestrojit přímo trojúhelník *ABC* $\Rightarrow$ můžeme sestrojit trojúhelník *ACT* (strana *AT* má délku dvou třetin z délky celé těžnice t_a, strana *CT* má délku dvou třetin z délky celé těžnice t_c). Tento trojúhelník pak doplníme na trojúhelník *ABC*.



Postup konstrukce:

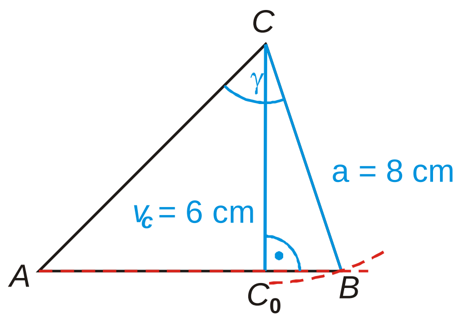
1. strana *AC*, $|AC| = b = 7\,\text{cm}$
2. kružnice $k\left(A; t_a : 3 \cdot 2 = 6\,\text{cm}\right)$
3. kružnice $l\left(C; t_c : 3 \cdot 2 = 4\,\text{cm}\right)$
4. T průsečík kružnic *k* a *l*
5. polopřímka AT
6. kružnice $m\left(T; t_a : 3 = 3\,\text{cm}\right)$
7. bod S_a průsečík polopřímky AT a kružnice *m*
8. polopřímka CT
9. kružnice $n\left(T; t_c : 3 = 2\,\text{cm}\right)$
10. bod S_c průsečík polopřímky CT a kružnice *n*
11. polopřímka AS_c
12. polopřímka CS_a
14. bod *B*, průsečík polopřímek AS_c a CS_a
15. trojúhelník *ABC*

Příklad má jediné řešení, pro velikost úhlu γ platí: $\gamma = 94°$.

Př. 4: Místo (místa), kde se nachází část pokladu, najdeš z výchozího bodu a směru takto:
a) $v_c = 6\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$, $\gamma = 63° \Rightarrow t_a + v_a$
b) $b = 9\,\text{cm}$, $t_b = 7\,\text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm} \Rightarrow \alpha + \beta$
Nezapomeň, že hodinové ručičky se otáčejí na odečítací stranu.

U každé úlohy si rozmysli, zda je trojúhelník (a tedy i poloha části pokladu) zadán jednoznačně. Pokud si nebudeš vědět rady, namodeluj situaci pomocí brček.

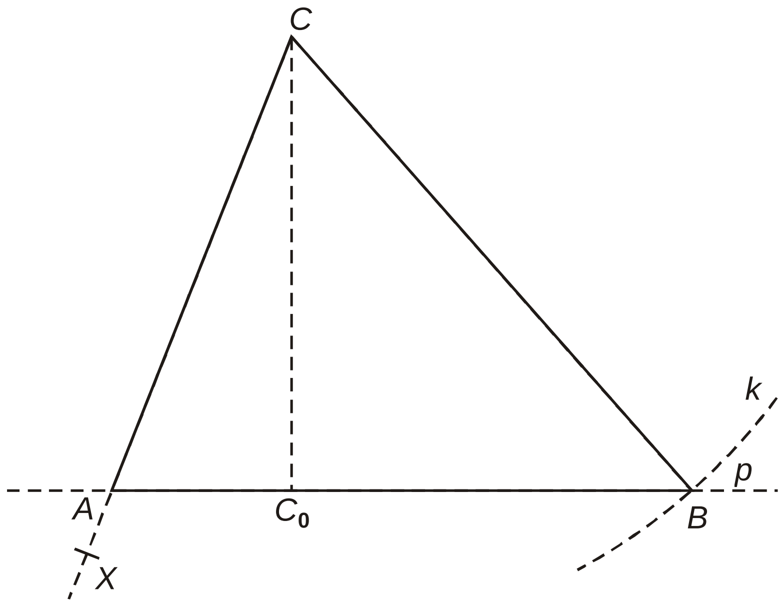
a) $v_c = 6\text{ cm}$, $a = 8\text{ cm}$, $\gamma = 63°$



Náčrtek:

Nejdříve sestrojíme trojúhelník BCC_0. Začneme výškou CC_0, bod B nalezneme pomocí kružnice $k(C; 8\text{ cm})$ (využití velikosti strany a) a kolmice na úsečku CC_0 jdoucí bodem C_0 (budoucí stran c, na kterou musí být výška v_c kolmá).

Po sestrojení trojúhelníku BCC_0 využijeme stranu BC k narýsování úhlu γ, který pak odkryje na přímce C_0B vrchol A.

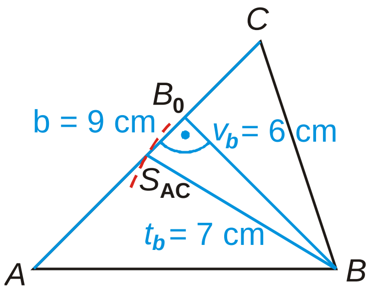


Postup konstrukce:

1. úsečka CC_0, $|CC_0| = v_c = 6\,\text{cm}$
2. přímka p, kolmice na CC_0 procházející bodem C_0
3. kružnice $k(C; a = 8\,\text{cm})$
4. bod B průsečík kružnice k s přímkou p
5. bod X, $|\sphericalangle BCX| = \gamma = 63°$
6. bod A, průsečík přímky p a polopřímky CX
7. trojúhelník ABC

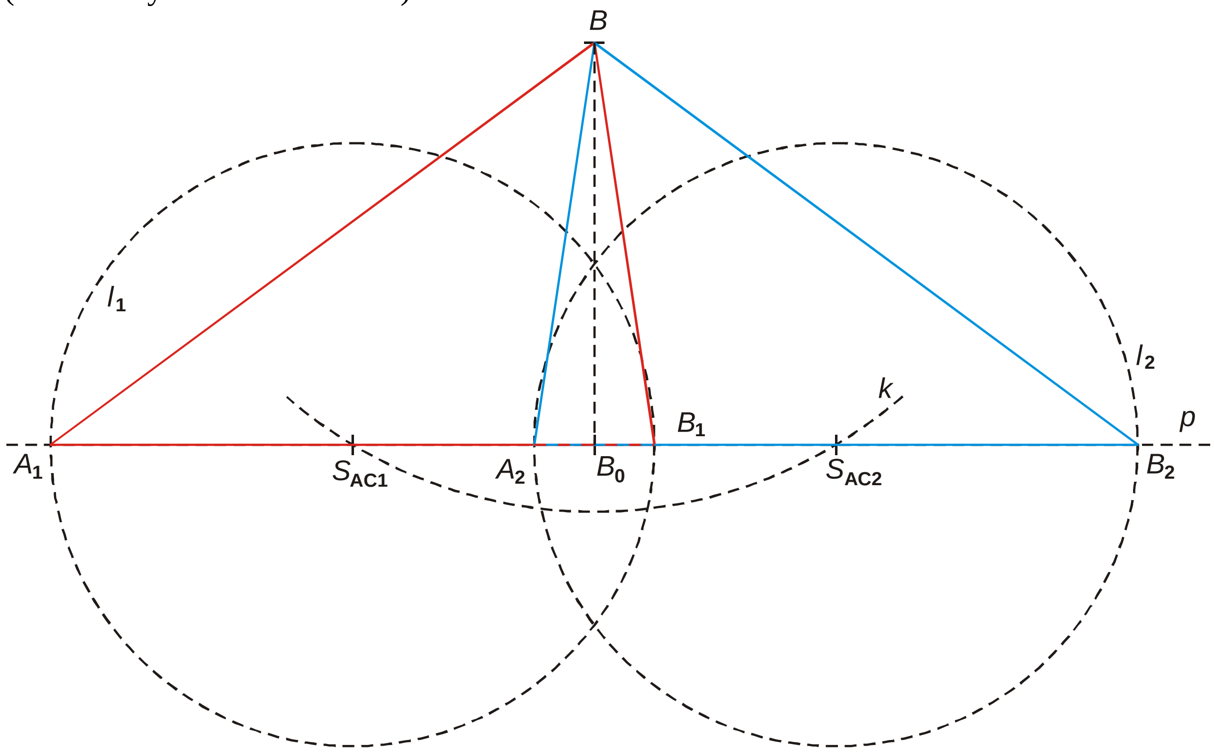
Příklad má jedno řešení. Pro hledané velikosti platí: $t_a + v_a = 11{,}6\text{ cm}$.

b) $b = 9\,\text{cm}$, $t_b = 7\,\text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm} \Rightarrow \alpha + \beta$



Náčrtek:

Nemůžeme sestrojit přímo trojúhelník *ABC* $\Rightarrow$ můžeme sestrojit trojúhelník BB_0S_{AC} (začneme od úsečky BB_0, bod S_{AC} najdeme jako průsečík kolmice na tuto úsečku a kružnice $k\left(B; t_b = 7\text{ cm}\right)$). Tento trojúhelník pak doplníme na trojúhelník *ABC*, využitím bodu S_{AC} (střed strany *b* o velikosti 9 cm).



Postup konstrukce:

1. úsečka BB_0, $\left|BB_0\right| = v_b = 6\,\text{cm}$
2. přímka *p*, kolmice na BB_0 procházející bodem B_0
3. kružnice $k\left(B; t_b = 7\,\text{cm}\right)$
4. bod S_{AC} průsečík kružnice *k* s přímkou *p*
5. kružnice $l\left(S_{AC}; b:2 = 4{,}5\,\text{cm}\right)$
6. body *A*,*B* průsečíky přímky *p* a kružnice *l*
7. trojúhelník *ABC*

Příklad má dvě řešení se shodnými velikostmi úhlu β a různými velikostmi úhlu α $\Rightarrow$ pro velikost úhlu $\alpha+\beta$ tak získáme dvě velikosti: $\alpha+\beta = 143°$ nebo $\alpha+\beta = 98°$.

Shrnutí: