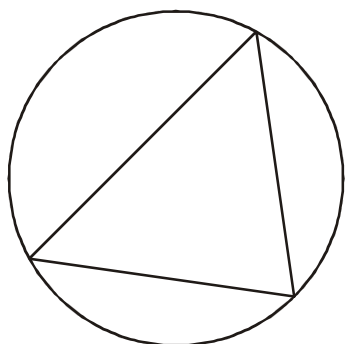
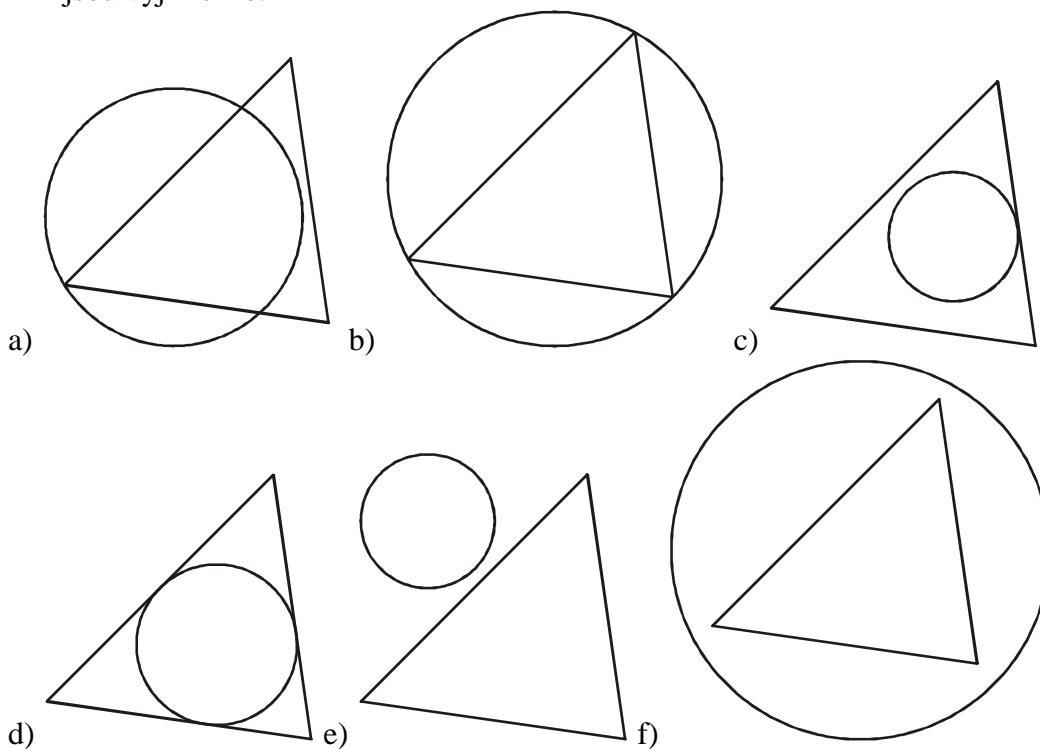


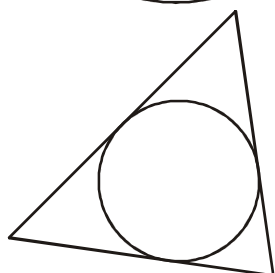
### 1.7.13 Kružnice opsaná a kružnice vepsaná

**Předpoklady:** 010712

**Př. 1:** Na obrázcích jsou znázorněny shodné trojúhelníky a různé kružnice  $k$ . Dvě z kružnic jsou speciální (jedinečné). Překresli obrázky těchto dvou kružnic do sešitu a napiš, čím jsou výjimečné.



Kružnice prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníku  $\Rightarrow$  říkáme, že **kružnice je opsaná** („kružnice je okolo“) trojúhelníku. Každému trojúhelníku lze opsat právě jednu kružnici.

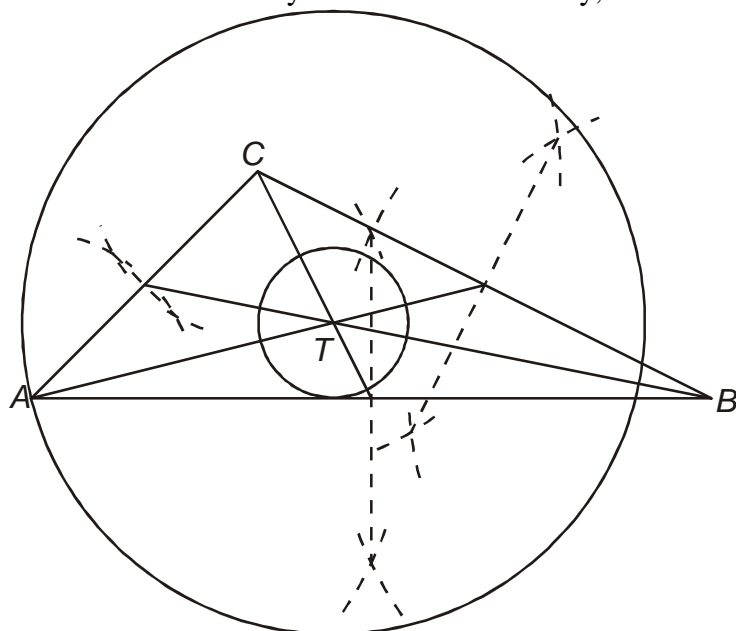


Kružnice se dotýká všech tří stran trojúhelníku  $\Rightarrow$  říkáme, že **kružnice je vepsaná** („kružnice je vevnitř“) trojúhelníku. Každému trojúhelníku lze vepsat právě jednu kružnici.

**Pedagogická poznámka:** Obě kružnice najdou žáci velmi rychle a jsou poměrně úspěšní i v tom, jaké vlastnosti mají. Střed obou kružnic navrhují hledat většinou v těžišti. V takovém případě se snažím dosáhnout toho, aby někdo navrhl protipříklad, pokud se nic neobjeví, nechám třídu, aby si do sešitu každý narýsoval trojúhelník, našel těžiště a zkusil z něj obě kružnice nakreslit.

Jak najít střed obou kružnic (je společný, nebo má každá jiný)? Není středem obou kružnic těžiště (je uprostřed trojúhelníku)?

Zkusíme si situaci narýsovat. Zvolíme obecný, hodně nesouměrný trojúhelník.



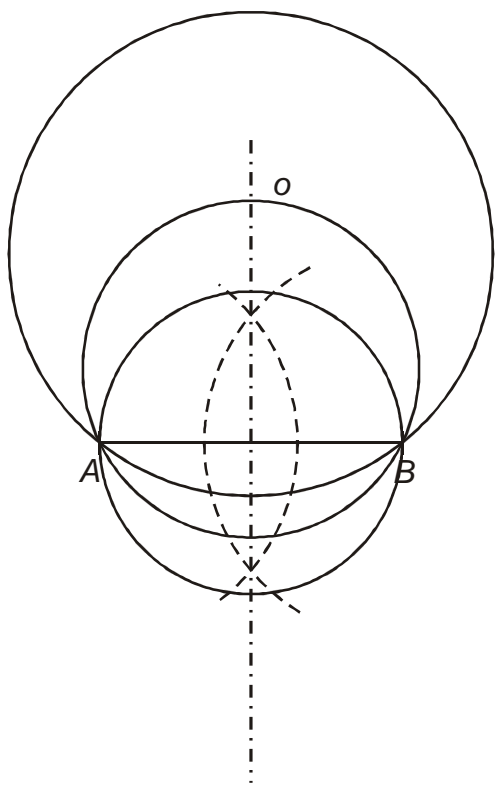
Z obrázku je zřejmé, že těžiště není v obecném trojúhelníku středem ani opsané ani vepsané kružnice.

**Problém:** Hledáme postup nalezení středů obou kružnic, který nespočívá v tom, že budeme zkoušet naslepo kružítkem najít střed kružnice. Hledáme postup, jak pro libovolný narýsovaný trojúhelník najít střed kružnice opsané (nebo vepsané) jako průsečík čar narýsovaných podle nějakých pravidel.

**Př. 2:** Jak hledáme osu úsečky? Narýsuj úsečku  $AB$ , najdi její osu a narýsuj dvě kružnice, které mají střed na ose úsečky  $AB$  a procházejí bodem  $A$ . Jakou zajímavou vlastnost tyto kružnice mají? Jakou společnou vlastnost mají body, které leží na ose úsečky? Může nám osa úsečky pomoci při konstrukci kružnice opsané nebo kružnice vepsané?

Osa úsečky:

- Z obou krajních bodů úsečky narýsujeme kružnice se stejným poloměrem (větším než polovina délky úsečky).
- Hledaná osa je přímka, která prochází přes průsečíky kružnic narýsovaných v předchozím bodu.



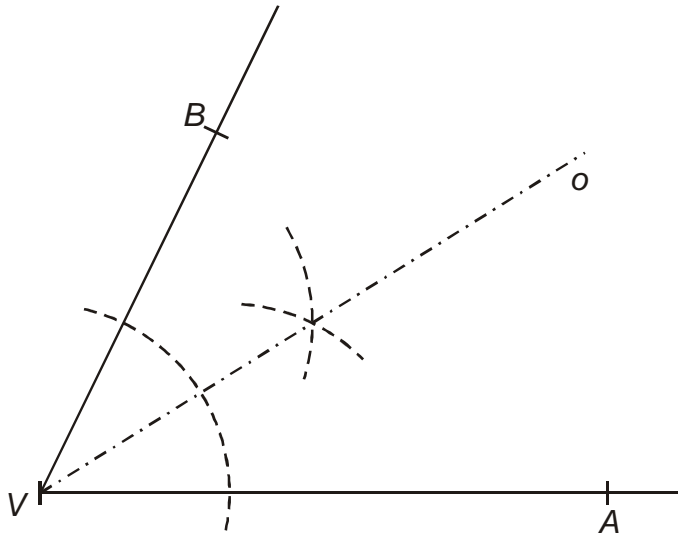
- Každá kružnice, která má střed na ose úsečky  $AB$  a prochází bodem  $A$ , prochází také bodem  $B$ .

Všechny body, které leží na ose úsečky, mají stejnou vzdálenost od bodů  $A$  a  $B$ .

Osa úsečky zřejmě pomůže k nalezení středu kružnice opsané (kružnice opsaná prochází vrcholy, stejně jako kružnice se středem na ose úsečky, procházejí krajními body úsečky).

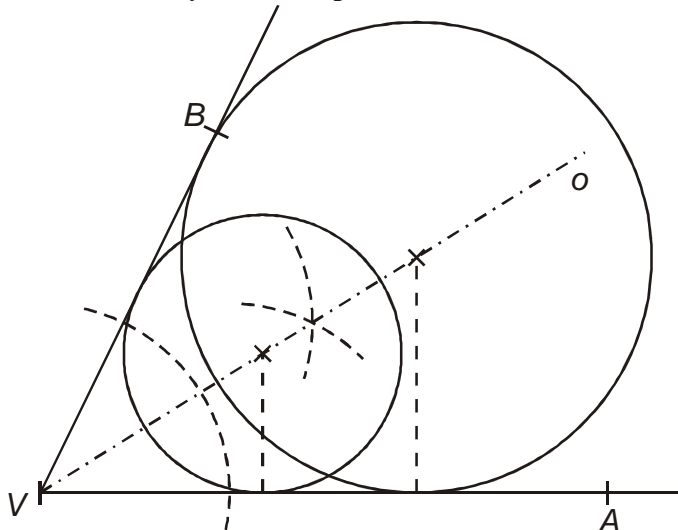
**Pedagogická poznámka:** Někteří žáci samozřejmě už v tomto okamžiku přijdou na to, jak střed kružnice opsané najít. Někteří mají tendenci, rýsovat pouze osu jedné ze stran a střed najít odhadem nebo prohlásit, že může být kdykoliv. Není problém je poopravit vhodným protipříkladem.

**Př. 3:** Jak hledáme osu úhlu? Narýsuj úhel  $AVB$  o velikosti  $64^\circ$ , najdi jeho osu a zkontroluj, zda jsi rýsoval správně. Narýsuj dvě libovolné kružnice se středem na ose úhlu  $AVB$ , které se dotýkají ramene  $AV$ . Jakou zajímavou vlastnost tyto kružnice mají? Jakou společnou vlastnost mají body, které leží na ose úhlu? Může nám osa úhlu pomoci při konstrukci kružnice opsané nebo kružnice vepsané?



Měření zjistíme, že osa rozdělila úhel na dva shodné úhly o velikosti  $32^\circ$ .

Při rýsování kružnice, která má střed na ose a dotýká se ramene  $VA$ , si na ose úhlu zvolíme libovolný bod jako střed kružnice a tímto bodem vedeme kolmici na rameno  $VA$ , abychom získali bod dotyku a tím i poloměr kružnice.



Každá kružnice se středem na ose úhlu dotýkající se ramene  $VA$  se dotýká také druhého ramene  $VB$ .

Všechny body na ose úhlu jsou stejně vzdálené od obou ramen.

Osa úhlu nám může pomoci při konstrukci kružnice vepsané (ta se dotýká stran trojúhelníka, stejně jako se kružnice se středem na ose úhlu dotýkají ramen úhlu).

**Př. 4:** Projdi si řešení obou předchozích příkladů . Sestav a zdůvodni postup pro nalezení kružnice opsané i vepsané pro obecný trojúhelník. Narýsuj libovolný ostroúhlý trojúhelník a narýsuj pro něj kružnici opsanou. Narýsuj libovolný ostroúhlý trojúhelník a narýsuj pro něj kružnici vepsanou.

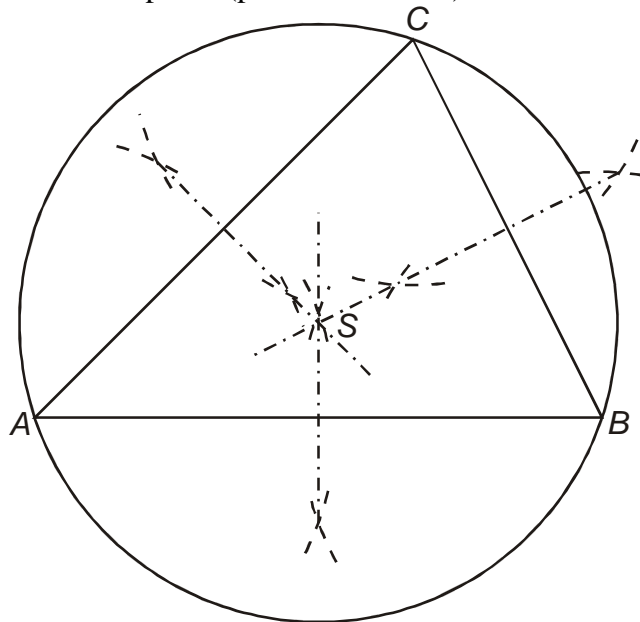
Kružnice opsaná (prochází vrcholy trojúhelníku, příklad 2):

- střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran:
  - všechny body na ose strany jsou stejně vzdáleny od vrcholů této strany  $\Rightarrow$  bod na průsečíku dvou os stran musí být stejně vzdálený od všech tří vrcholů,
  - kružnice, která má střed na ose strany může procházet oběma krajními body strany  $\Rightarrow$  kružnice, která leží na průsečíku dvou os stran, může procházet všemi vrcholy trojúhelníku.

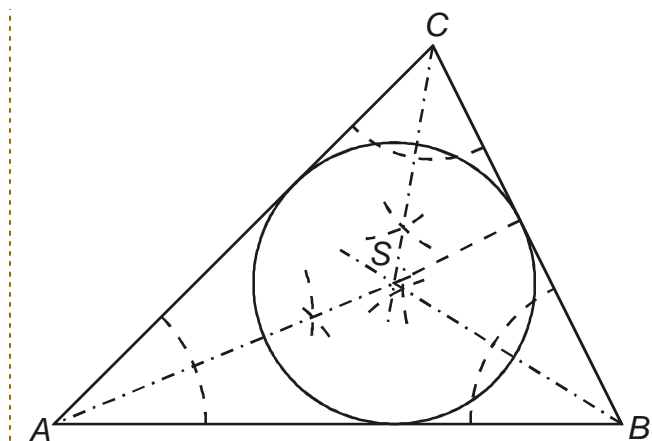
Kružnice vepsaná (dotýká se stran trojúhelníku, příklad 3):

- střed kružnice vepsané leží na průsečíku os úhlů:
  - všechny body na ose úhlu jsou stejně vzdáleny od ramen úhlu (tedy dvou stran trojúhelníku)  $\Rightarrow$  bod na průsečíku dvou os úhlů musí být stejně vzdálený od všech tří stran,
  - kružnice, která má střed na ose úhlu se může dotýkat obou ramen úhlu (dvou stran trojúhelníku)  $\Rightarrow$  kružnice, která leží na průsečíku dvou os úhlů, se může dotýkat všech stran trojúhelníku.

Kružnice opsaná (průsečík os stran)



Kružnice vepsaná (průsečík os úhlů)



**Shrnutí:** Pro každý trojúhelník můžeme najít kružnici opsanou (prochází vrcholy) a kružnici vepsanou (dotýká se stran).