

## 1.7.17 Trojúhelník (shrnutí)

**Předpoklady:** 010716

### Důležité znalosti

- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je  $180^\circ$ .
- Proti většímu úhlu leží větší strana.
- Výška trojúhelníku prochází vrcholem a je kolmá na protější stranu (může ležet mimo trojúhelník).
- Těžnice spojuje střed strany s protějším vrcholem (vždy leží uvnitř). Těžnice se protínají v těžišti, které dělí těžnici na třetinu a dvě třetiny.
- Trojúhelníky se mohou shodovat podle vět *sss*, *sus*, *usu*, *Ssu*.
- Střední příčky spojují středy stran. Rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky poloviční velikosti. Střední příčky jsou rovnoběžné s odpovídajícími stranami.
- Střed kružnice opsané je stejně daleko od všech vrcholů  $\Rightarrow$  leží na průsečíku os stran.
- Střed kružnice vepsané je stejně daleko od všech stran trojúhelníka  $\Rightarrow$  leží na průsečíku os úhlů.

### Zádrhele

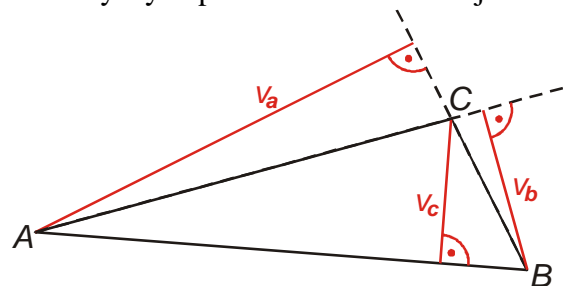
- Nesmíme plést výšky, těžnice, střední příčky, osy stran a osy úhlů dohromady.

### Dobré rady

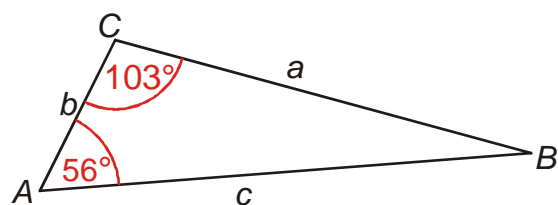
- Náčrtek by měl zachycovat (nebo přehánět) vzájemné poměry stran a úhlů.
- Náčrtek obecného trojúhelníku musí být obecný (neměl by vypadat jako rovnostranný nebo rovnoramenný).

**Př. 1:** Načrtni obrázek trojúhelníku s výškami. Zvol takový trojúhelník, ve kterém bude typ výšek, který Ti dělal největší problémy.

Obtížnější je sestřít výšky v tupoúhlých trojúhelnících, kde si musíme prodlužovat strany a dvě výšky neprocházejí vnitřkem trojúhelníku.



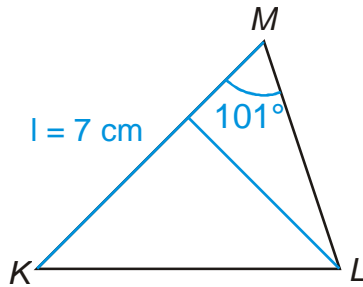
**Př. 2:** V trojúhelníku  $ABC$  platí  $\alpha = 56^\circ$ ,  $\gamma = 103^\circ$ . Načrtni jeho obrázek a uspořádej jeho strany podle velikosti.



Pro délky stran platí:  $c > a > b$ .

**Př. 3:** Narýsuj trojúhelník  $KLM$ ,  $v_l = 5$  cm,  $l = 7$  cm,  $|\sphericalangle LMK| = 101^\circ$ . Narýsuj všechny jeho výšky a najdi jejich průsečík. Která z výšek je nejdelší?

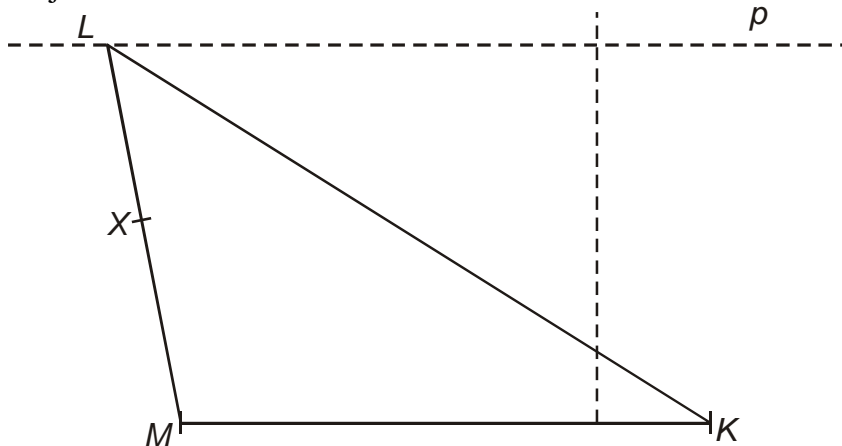
Náčrtek:



Návrh postupu:

1. strana  $l$
2. úhel  $|\sphericalangle LMK| = 101^\circ$
3. rovnoběžka se stranou  $l$  ve vzdálenosti 5 cm (kvůli výšce  $v_l$ )
4. průsečík ramene úhlu s rovnoběžkou: bod  $L$
5. trojúhelník  $KLM$

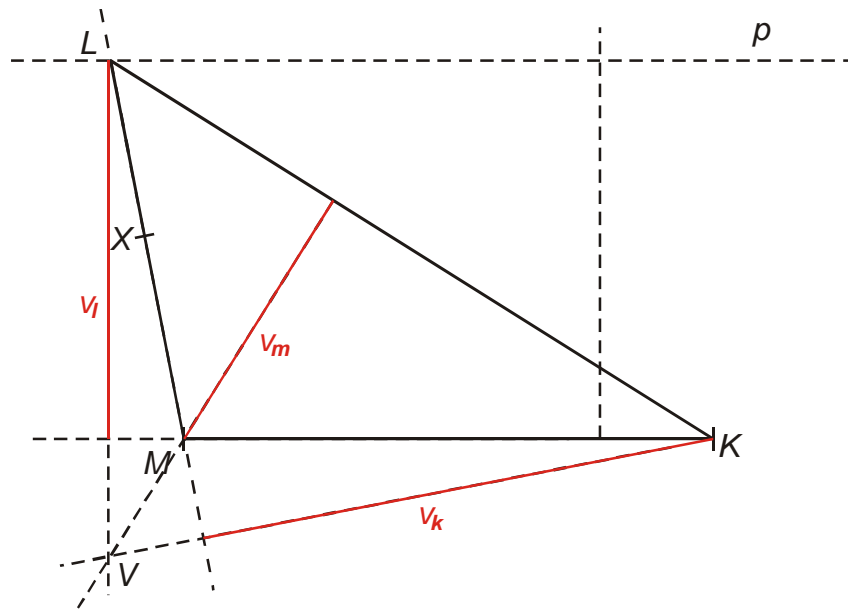
Trojúhelník  $KLM$



**Zápis konstrukce:**

1. úsečka  $MK$ ,  $|MK| = 7$  cm
2. bod  $X$ ,  $|\sphericalangle LMX| = 101^\circ$
3. přímka  $p$ ,  $p \parallel MK$  ve vzdálenosti 5 cm
4. bod  $L$  je průsečík polopřímky  $MX$  s přímkou  $p$
5. trojúhelník  $KLM$

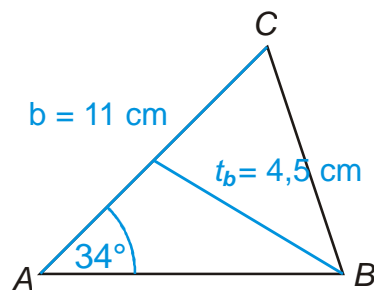
Výšky



Velikosti výšek:  $v_k = 6,9 \text{ cm}$ ,  $v_l = 5 \text{ cm}$ ,  $v_m = 3,7 \text{ cm}$ .

**Př. 4:** Narýsuj trojúhelník  $ABC$ , jestliže znáš  $b = 11 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 34^\circ$ ,  $t_b = 4,5 \text{ cm}$ . Najdi jeho těžiště.

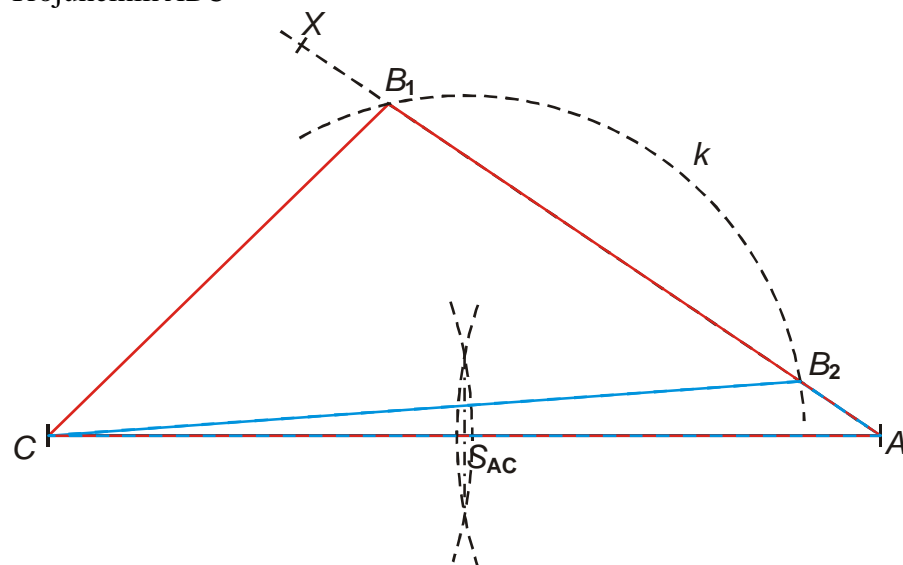
Náčrtek:



Návrh postupu:

1. strana  $b$
2. úhel  $\alpha = 34^\circ$
3. kružnice  $k(S_{AC}; 4,5 \text{ cm})$  kvůli těžnici  $t_b = 4,5 \text{ cm}$  (vrchol  $C$  je od středu strany  $AC$  vzdálen  $4,5 \text{ cm}$ )
4. průsečík ramene úhlu s kružnicí: bod  $V$
5. trojúhelník  $ABC$

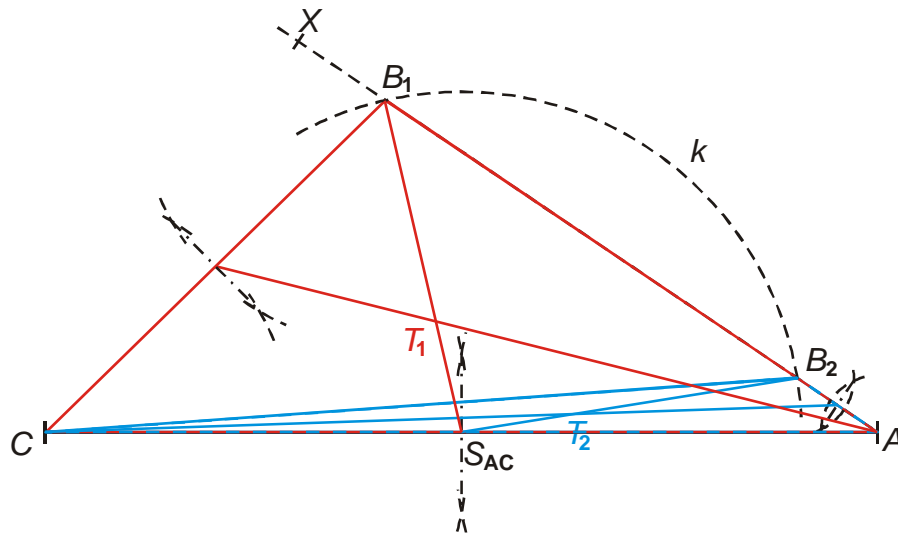
Trojúhelník  $ABC$



**Zápis konstrukce:**

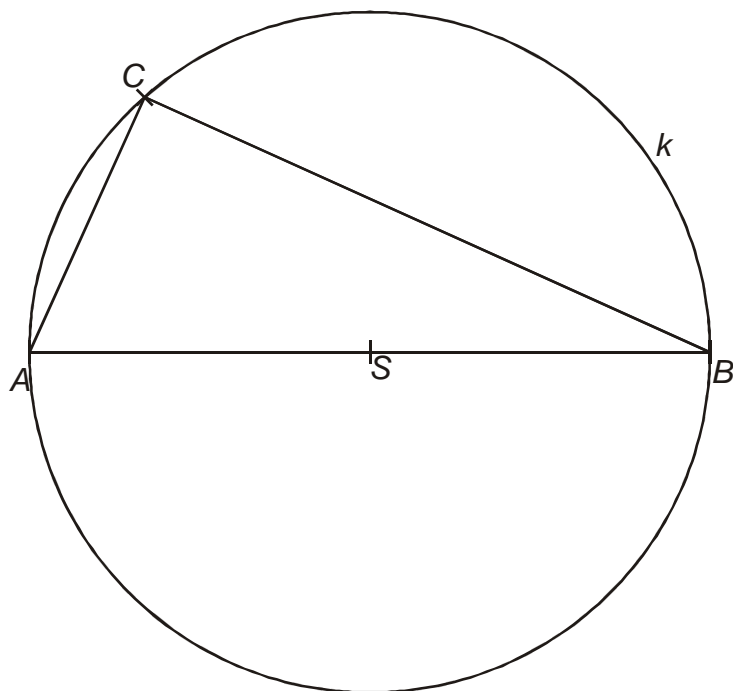
1. úsečka  $AC$ ,  $|AC| = b = 11$  cm
2. bod  $X$ ,  $|\sphericalangle CAX| = \alpha = 34^\circ$
3. kružnice  $k(S_{AC}; 4,5$  cm)
4. bod  $B$  je průsečík polopřímky  $AX$  s kružnicí  $k$
5. trojúhelník  $ABC$

Těžiště



**Př. 5:** Narýsuj úsečku  $AB$ ,  $|AB| = 9$  cm. Narýsuj bod  $C$  libovolně tak, aby kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$  měla svůj střed na úsečce  $AB$ . Změř vnitřní úhly trojúhelníku  $ABC$ .

Můžeme postupovat „obráceně“. Víme, že kružnice opsaná trojúhelníku má mít střed na úsečce  $AB \Rightarrow$  jediný bod na úsečce  $AB$ , který je stejně daleko od bodů  $A, B$  je střed úsečky  $AB \Rightarrow$  kružnice opsaná trojúhelníku musí mít střed ve středu úsečky  $AB$  a musí procházet body  $A, B \Rightarrow$  můžeme ji narýsovat a jako vrchol si vybrat libovolný bod na této kružnici kromě bodů  $A, B$ .



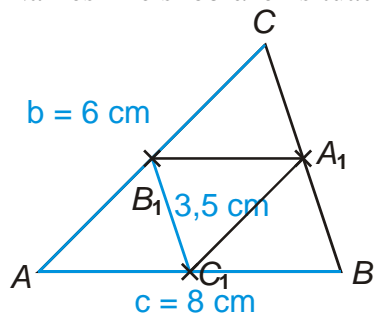
Změřené velikosti úhlů:  $\alpha = 66^\circ$ ,  $\beta = 24^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .

Velikosti úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  se mění podle toho, jaký bod na narýsované opsané kružnici zvolíme jako bod  $C$ , velikost úhlu  $\gamma$  je vždy  $90^\circ$  (což je jasné, protože jsme již zjistili, že kružnice opsaná má střed na straně trojúhelníků, právě když je pravouhlý).

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je vlastně objevením Thaletovy věty, je zajímavé sledovat, zda si na něj někdo vzpomene, až ji budete probírat.

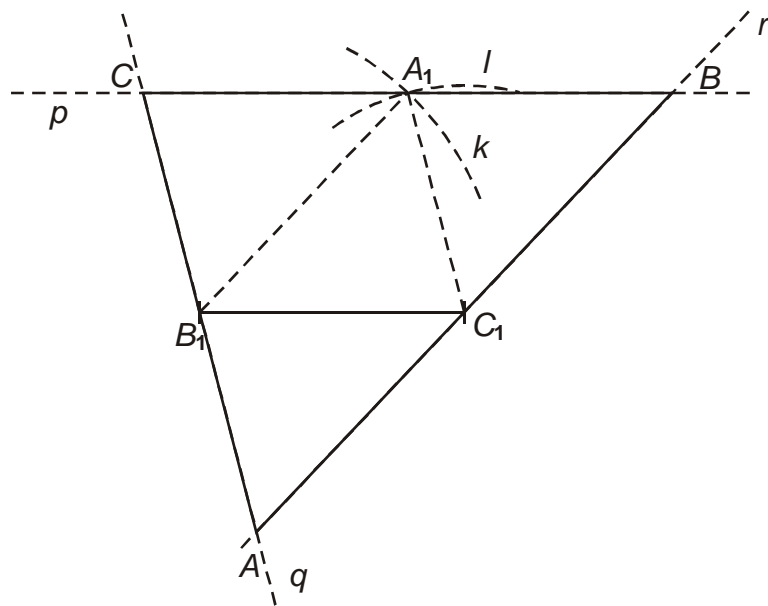
**Př. 6:** Je dána úsečka  $B_1C_1$ ,  $|B_1C_1| = 3,5 \text{ cm}$ . Narýsuj trojúhelník  $ABC$  tak, aby úsečka  $B_1C_1$  byla jeho střední příčkou a zbývající strany měly délku  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ .

Nakreslíme si obrázek situace.



Důležité: střední příčky jsou rovnoběžné s protějšími stranami a jejich délka je poloviční  $\Rightarrow$

- můžeme si dopočítat velikost strany  $BC$  ( $2 \cdot 3,5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$ ). To nám však neumožňuje příklad vyřešit, protože musíme začít od úsečky  $B_1C_1$ ,
- můžeme dopočítat zbývající strany trojúhelníku  $A_1B_1C_1$  ( $|A_1C_1| = 6 : 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ ,  $|A_1B_1| = 8 : 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ ), ten narýsovat a pak pomocí rovnoběžek doplnit na trojúhelník  $ABC$ .



**Zápis konstrukce:**

1. úsečka  $B_1C_1$ ,  $|B_1C_1| = 3,5$  cm
2. kružnice  $k(B_1; c : 2 = 4$  cm)
3. kružnice  $l(C_1; b : 2 = 3$  cm)
4. bod  $A_1$  je průsečík kružnic  $k$  a  $l$
5. trojúhelník  $A_1B_1C_1$
6. přímka  $p$ ,  $p \parallel B_1C_1$ ,  $p$  prochází bodem  $A_1$
7. přímka  $q$ ,  $q \parallel A_1C_1$ ,  $q$  prochází bodem  $B_1$
8. přímka  $r$ ,  $r \parallel A_1B_1$ ,  $r$  prochází bodem  $C_1$
9. bod  $A$  je průsečík přímek  $r$  a  $q$
10. bod  $B$  je průsečík přímek  $r$  a  $p$
11. bod  $C$  je průsečík přímek  $p$  a  $q$
12. trojúhelník  $ABC$

**Shrnutí:**