1.8.4 Porovnávání celých čísel

Předpoklady: 010803

Pedagogická poznámka: Při hodině je třeba postupovat tak, aby se s řešením příkladu začalo nejpozději 10 minut před koncem i za cenu zkrácení času na vyřešení příkladu 6.

Př. 1: Vypočti.
a) $|13|$ b) $|-2|$ c) $|0|$ d) $|3-9|$ e) $|-3-4|$

a) $|13| = 13$ b) c) $|0| = 0$

d) $|3-9| = |-6| = 6$ e) $|-3-4| = |-7| = 7$

Př. 2: Čísla 3 a –3 se nazývají čísla navzájem opačná. Proč? Je možné všechna celá čísla spárovat do navzájem opačných dvojic?

Opačná, protože leží na opačných koncích číselné osy.
Do dvojic navzájem opačných čísel můžeme spárovat všechna celá čísla kromě nuly. O nule říkáme, že je opačná sama k sobě (jako jiné body na ose souměrnosti, které také zobrazují samy na sebe).

Př. 3: Najdi co nejvíce vlastnosti, které všechny mají dvojice navzájem opačných čísel $a, -a$.

Navzájem opačná čísla $a, -a$:

- mají stejnou absolutní hodnotu (jsou stejně daleko od nuly),
- jejich obrazy na ose jsou osově souměrné (podle osy procházející nulou kolmo na číselnou osu),
- jejich součet se rovná nule.

Pedagogická poznámka: Je třeba sledovat žáky při čtení zadání a zareagovat, když si nebudou jistí, co znamenají zápisy $a, -a$ pomocí proměnné.

Stejně jako u přirozených čísel i u čísel celých platí, že čísla zobrazená na ose vpravo jsou větší než čísla zobrazená vlevo.

Př. 4: Porovnej následující dvojice čísel.
a) $2 \quad 6$ b) $-1 \quad 2$ c) $-4 \quad -6$ d) $12 \quad -25$
e) $1 \quad 1003$ f) $-1 \quad -1003$ g) $-5 \quad 0$ h) $10 \quad -52$

a) $2 < 6$ b) $-1 < 2$ c) $-4 > -6$ d) $12 > -25$
e) $1 < 1003$ f) $-1 > -1003$ g) $-5 < 0$ h) $10 > -52$

Pedagogická poznámka: Obyčejné porovnávání konkrétních čísel nedělá žákům žádné problémy, myslím, že není třeba se jím více zabývat.

Př. 5: Čísla si můžeme označit pomocí písmen. Která z čísel $\{-10;-7;-4;0;1;3;5;9\}$ mohou být označena pomocí písmene *a*, pokud má platit:
a) $a \geq -4$ b) $a < 1$ c) $|a| < 5$ d) $|a| \geq 7$

a) $a \geq -4 \Rightarrow$ z nabízených čísel můžeme jako *a* označit čísla: $\{-4;0;1;3;5;9\}$

b) $a < 1 \Rightarrow$ z nabízených čísel můžeme jako *a* označit čísla: $\{-10;-7;-4;0\}$

c) $|a| < 5 \Rightarrow$ z nabízených čísel můžeme jako *a* označit čísla: $\{-4;0;1;3\}$

d) $|a| \geq 7 \Rightarrow$ z nabízených čísel můžeme jako *a* označit čísla: $\{-10;-7;9\}$

Př. 6: Doplň tabulku.

a	$a+2$	$4a$	$a-4$	$\|a\|$	$-a$
5					
-2					
	2				
			7		
				7	

a	$a+2$	$4a$	$a-4$	$\|a\|$	$-a$
5	$5+2=7$	$4\cdot5=20$	$5-4=1$	$\|5\|=5$	-5
-2	$-2+2=0$	$4\cdot(-2)=-8$	$-2-4=-6$	$\|-2\|=2$	$-(-2)=2$
$a+2=2$ $a=0$	2	$4\cdot0=0$	$0-4=-4$	$\|0\|=0$	$-0=0$
$a-4=7$ $a=11$	13	44	7	11	-11
$\|a\|=7$ $a=7$ nebo $a=-7$	$7+2=9$ $-7+2=-5$	$4\cdot7=28$ $4\cdot(-7)=-28$	$7-4=3$ $-7-4=-11$	7	-7 $-(-7)=7$

Pedagogická poznámka: Řeší se zápis $4a$. Matematici to tak prostě dělají, navíc to odpovídá i běžné řeči, kde při dávání dohromady říkáme dva a tři (místo plus používáme spojku a), zatímco při sdělování počtu řekneme tři rohlíky (místo tři krát rohlík).
Problémy bývají se sloupcem $4a$ v druhém řádku, kde mají žáci spočítat $4a = 4\cdot(-2) = -8$ (Kolik budeš mít peněz, když budeš čtyřem kamarádům družit po 2 Kč?).
Ve sloupečku s opačným číslem žáci píší rovnou výsledky, proto při kontrole schválně píšu na tabuli $-(-2)=2$ a vzpomínáme, kde už jsme to viděli (prominutí

dluhu). Jde o další dobrý důvod proč $-(-2)=2$.

Jinak příklad používám jako synchronizační, všichni by měli stihnout první dva řádky, na zbytku pracujeme tak dlouho, jak je potřeba.

Př. 7: Porovnej dvojice čísel a poté i dvojice čísel, která jsou k původním číslům opačná (například po dvojici 2 s 5 i dvojici -2 a -5).

a) $2;5$ b) $-3;-4$ c) $7;2$ d) $-10;-51$

a) $2;5$: $2<5$, $-2>-5$

b) $-3;-4$: $-3>-4$, $3<4$

c) $7;2$: $7>2$, $-7<-2$

d) $-10;-51$: $-10>-51$, $10<51$

Postřeh: nerovnost u dvojice opačných čísel je vždy obrácená než u původní dvojice. Další dobrý důvod proč číslům říkám opačná.

Pedagogická poznámka: Po kontrole příkladu 8 je třeba se zeptat, kdo si všiml u příkladu 7 něčeho zajímavého (a kdo si to napsal). S žáky, kteří si něčeho nevšimli je třeba mluvit o tom, že řešení příkladů slouží právě k takovémuto všímání si, které znamená, že nad tím co dělají, doopravdy přemýšlejí.

Př. 8: Dokonči věty.

a) “Platí-li pro dvě přirozená čísla nerovnost $a<b$, platí pro opačná záporná celá čísla nerovnost ….“

b) “Platí-li pro dvě přirozená čísla nerovnost $a>b$, platí pro opačná záporná celá čísla nerovnost ….“

a) “Platí-li pro dvě přirozená čísla nerovnost $a<b$, platí pro opačná záporná celá čísla nerovnost $-a>-b$.“

Konkrétním příkladem je bod a) předchozího příkladu. Protože $a<b$, je *a* na ose blíže k nule než *b*, proto je $-a$ blíže k nule než $-b$ a je tedy větší.

b) “Platí-li pro dvě přirozená čísla nerovnost $a>b$, platí pro opačná záporná celá čísla nerovnost $-a<-b$“.

Konkrétním příkladem je bod c) předchozího příkladu. Protože $a>b$, je *a* na ose dál od nuly než *b*, proto je $-a$ dál od nuly než $-b$ a je tedy menší.

Př. 9: Rozhodni o pravdivosti následujících vět.

a) Každé kladné celé číslo je větší než nula.

b) Existuje záporné celé číslo, které je menší než nula.

c) Libovolné kladné celé číslo je menší než libovolné záporné celé číslo.

d) Pokud pro celá čísla platí $a>b$, platí i $|a|>|b|$.

a) Každé kladné celé číslo je větší než nula.

Pravda, kladná celá čísla jsou na ose napravo do nuly.

b) Existuje záporné celé číslo, které je menší než nula.
Pravda, všechna záporná celá čísla jsou menší než nula, můžeme tedy vzít libovolné z nich a bude menší než nula.

c) Libovolné kladné celé číslo je menší než libovolné záporné celé číslo.
Nepravda, žádné kladné celé číslo není menší než libovolné záporné číslo.

d) Pokud pro celá čísla platí $a > b$, platí i $|a| > |b|$.
Není pravda, například $-2 > -7$, ale není pravda, že $|-2| = 2 > |-7| = 7$.

Pedagogická poznámka: Spíš lepší žáci mají problém s bodem b), který se jim zdá nesprávný, protože všechna záporná celá čísla jsou menší než nula. Je třeba s nimi probrat tvrzení podobných věty (všichni kluci s primy jsou teď v této třídě, znamená to, že není pravda, že jsi tady i ty).

Př. 10: Petr a Jirka se dohadují o nejvyšší horu světa. Petr uznává, že největší nadmořskou výšku má vrchol Mount Everestu, ale odmítá přijmout Mount Everest jako nejvyšší horu, protože vlastní hora vyrůstá z náhorní plošiny ve velké výšce (nikdo netvrdí, že rozhledna na šumavském Poledníku je vyšší než Eiffelovka, i když má vrchol ve větší nadmořské výšce, dokonce i Petřínská rozhledna pětkrát menší než její pařížská předloha má vrchol výše). Začali tedy hledat hory, které nejvíce přesahují okolí, ze kterého vyrůstají.

Mount Everest se z jedné strany zdvíhá z náhorní roviny ve výšce 5000 m, z druhé stran prudce padá do nížiny (začíná vzdušnou čarou přibližně 70 km od vrcholu).
Některé kandidátky:
Elbrus (nejvyšší hora Kavkazu) je vysoký 5642 m, hřeben velkého Kavkazu má šířku okolo 150 km.
Džengis Čokosu (7439 m) na hranicích Číny a Kyrgyzstánu leží na hřebu, který se zdvíhá z výšky 1000 km a je široký 60 km.
Masív Kilimandžára (5895 m) má v průměru 20 – 30 km a zvedá se z výšky 1000 m. n. m..
Hora G. Rinjani (3726 m) na ostrově Lombok (Indonésie), jehož základ vhloubce 1000 m pod hladinou oceánu je široký přibližně 100 km.
Puncak Jaya (4882 m) v pohoří Maoke (Nová Guinea) širokém 80 km (v místech, kde se zdvíhá z nížiny).

Př. 11: Eva se o pátrání kluků po nejvyšší hoře dozvěděla a musela je zklamat. Nejvyšší horou na světě je Mouna Kea, má sice jenom 4205 m.n .m, ale vyrůstá z mořského dna v hloubce 5000 m. Urči její výšku.

Pokud bychom brali celý ostrov Hawii jako hor Maina Kea, byla by její výška $4205 - (-5000) = 9205$ m.

Shrnutí: Celá čísla porovnáváme stejným způsobem jako čísla přirozená.