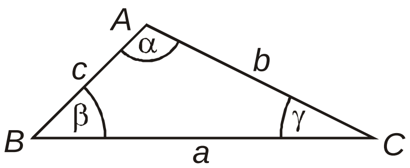
2.1.10 Trojúhelník

Předpoklady: 020107

Nejdůležitější věci o trojúhelnících:

- značení vrcholů stran a úhlů: 

,
- součet délek dvou stran je větší než třetí strana (trojúhelníková nerovnost),
- proti větší straně leží větší úhel ($\Rightarrow$ proti shodným stranám leží shodné úhly,
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
- osa strany je kolmá na stranu a prochází jejím středem,
- těžnice spojuje střed strany s protějším vrcholem a těžiště ji dělí v poměru 1:2,
- výška spojuje vrchol s patou kolmice na protější stranu,
- střední příčka spojuje středy dvou stran (a spoluvytváří poloviční trojúhelníky),
- střed kružnice opsané je stejně daleko od všech vrcholů $\Rightarrow$ leží na průsečíku os stran,
- střed kružnice vepsané je stejně daleko od všech stran trojúhelníka $\Rightarrow$ leží na průsečíku os úhlů.

Dělení trojúhelníků podle velikosti největšího vnitřního úhlu:

- ostroúhlé,
- pravoúhlé,
- tupoúhlé.

Dělení trojúhelníků podle velikosti stran:

- obecné,
- rovnoramenné,
  - rovnostranné.

Př. 1: Proč v dělení trojúhelníků podle velikosti stran není rovnostranný trojúhelník odsazen černým kolečkem na stejné úrovni jako trojúhelník rovnoramenný a obecný?

Rovnostranný trojúhelník je speciálním případem rovnoramenného trojúhelníku (každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný).

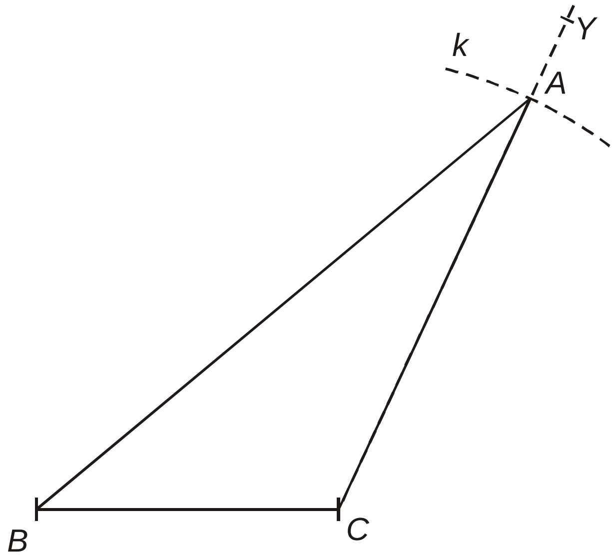
Př. 2: Proč je u prvního dělení trojúhelníků uvedeno "podle velikosti největšího vnitřního úhlu" a ne pouze "podle velikosti vnitřních úhlů"?

I tupoúhlé trojúhelníky mají ostré úhly $\Rightarrow$ pokud by záleželo na velikosti jednoho úhlu, všechny trojúhelníky by byly ostroúhlé $\Rightarrow$ sledujeme pouze velikost největšího z trojúhelníků.

Př. 3: Může mít tupoúhlý trojúhelník dva tupé úhly?

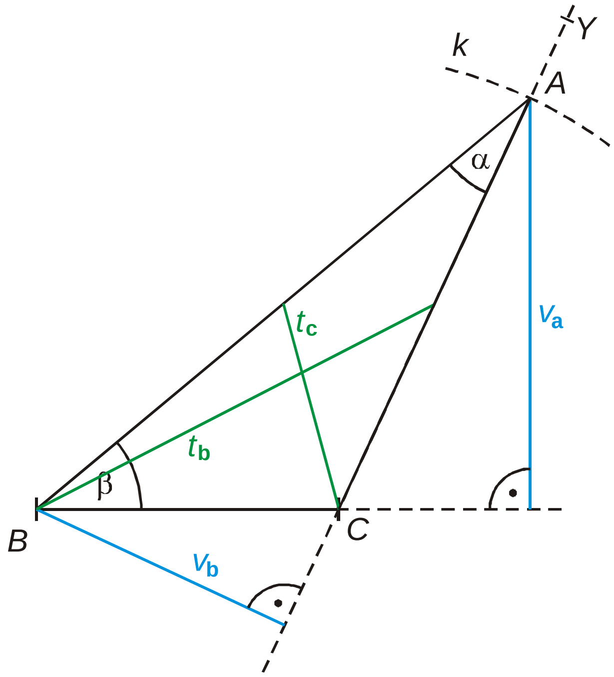
Tupoúhlý trojúhelník dva tupé úhly mít nemůže. Po odečtení tupého úhlu od $180°$ zbývá na dva zbývající vnitřní úhly méně než $90°$.

Př. 4: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $\gamma = 115°$. Vyznač a změř: α, β, v_a, v_b, t_b a t_c. Narýsuj kružnici opsanou trojúhelníku *ABC*.



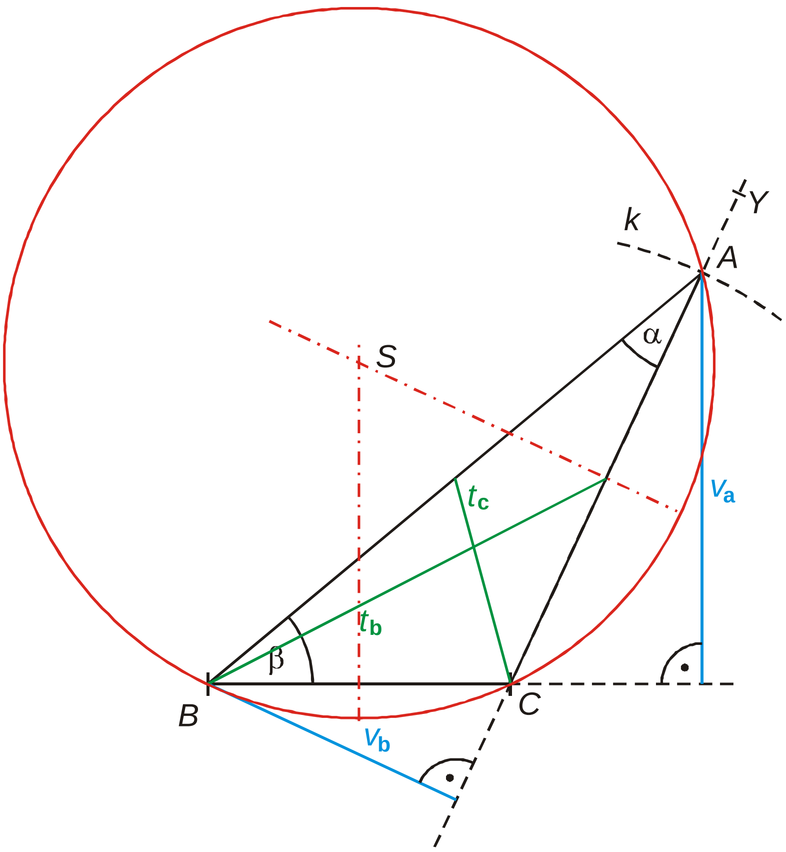
1. úsečka *BC*, $|BC| = a = 4\,\text{cm}$
2. polopřímka *CY*, $|\sphericalangle BCY| = \gamma = 115°$
3. kružnice $k(C, b = 6\,\text{cm})$
4. bod *A* průsečík kružnice *k* a polopřímky *CY*
5. trojúhelník *ABC*

Vyznač a změř: α, β, v_a, v_b, t_b a t_c.



$\alpha = 25°$
$\beta = 40°$
$v_a = 5{,}4\,\text{cm}$
$v_b = 3{,}6\,\text{cm}$
$t_b = 5{,}9\,\text{cm}$
$t_c = 2{,}8\,\text{cm}$

Kružnice opsaná prochází všemi vrcholy trojúhelníku $\Rightarrow$ její střed je stejně daleko od všech vrcholů $\Rightarrow$ její střed leží na průsečíků od stran.



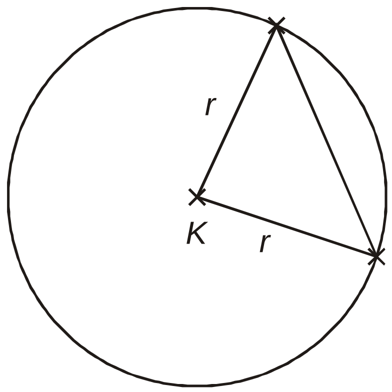
Pedagogická poznámka: Poměrně často se vyskytují trojúhelníky sestrojené podle zadání $a = 4\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $\gamma = 115°$ (výměnu *a* za *c* jsem zatím nezaregistroval), zřídka (ale v každé třídě) se vyskytne trojúhelník, kde $\gamma = 65°$ kvůli špatné konstrukci úhlu. Část studentů má problém při měření vzdáleností, kde je pletou pomocné čáry pro konstrukci výšek a měří vzdálenosti až k nim.
Při konstrukci kružnice opsané se objevují snahy a nalezení středu metodou pokus omyl.

Př. 5: V trojúhelníku *ABC* platí: $\alpha = 67°$, $\gamma = 95°$. Je možné trojúhelník jednoznačně sestrojit? Seřaď jeho strany podle velikosti. O jaký typ trojúhelníku jde?

Ze dvou zadaných úhlů můžeme vypočítat velikost třetího úhlu (a tím určit tvar trojúhelníku), ale protože nemáme žádný údaj o velikosti (žádnou délku) trojúhelník jednoznačně sestrojit nemůžeme.
$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 67° - 95° = 18°$
$\beta < \alpha < \gamma \Rightarrow b < a < c$
Trojúhelník *ABC* je tupoúhlý.

Př. 6: Vrcholy *L*, *M* trojúhelníku *KLM* leží na kružnici $k(K, r)$. Co můžeme o trojúhelníku *KLM* s jistotou tvrdit?

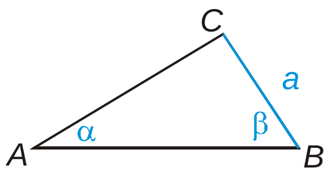
Nakreslíme si obrázek.



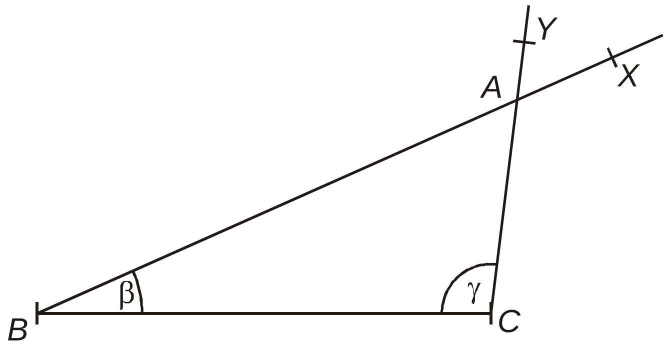
Dvě strany trojúhelníku mají délku $r \Rightarrow$ trojúhelník je minimálně rovnoramenný.

Př. 7: Sestroj trojúhelník *ABC*, jestliže platí: $a = 6\,\text{cm}$, $\beta = 24°$, $\alpha = 59°$. Leží průsečík výšek uvnitř trojúhelníku? Svůj odhad potvrď tím, že všechny výšky sestrojíš a průsečík najdeš. Narýsuj kružnici vepsanou trojúhelníku *ABC*. Jaký je její poloměr?

Náčrtek:

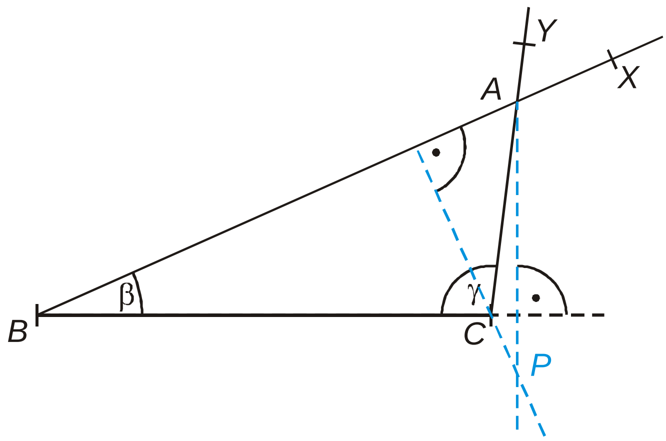


Pokud chceme trojúhelník sestrojit, potřebujeme určit úhel γ:
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 59° - 24° = 97°$.

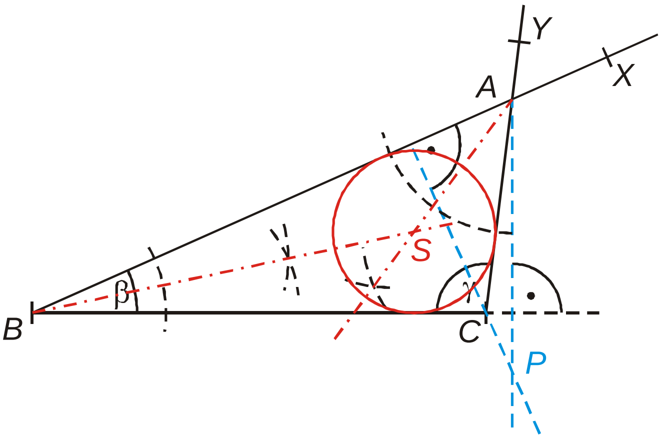


1. úsečka *BC*, $|BC| = a = 6\,\text{cm}$
2. polopřímka *CY*, $|\sphericalangle BCY| = \gamma = 97°$
3. polopřímka *BX*, $|\sphericalangle CBX| = \beta = 24°$
4. bod *A* průsečík polopřímek *CY* a *BX*
5. trojúhelník *ABC*

Průsečík výšek bude ležet mimo trojúhelník, protože úhel γ je tupý.



Kružnice vepsaná se dotýká všech stran trojúhelníka $\Rightarrow$ její střed je stejně vzdálený od všech stran $\Rightarrow$ střed leží na osách úhlů.



Poloměr kružnice vepsané je 1,1 cm.

Shrnutí: