

2.2.15 Sčítání a odčítání zlomků II

Předpoklady: 020214

Př. 1: Najdi chyby. Vysvětli, proč není možné tímto způsobem postupovat.

a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{4}{14} + \frac{7}{14} = \frac{11}{14}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{6}{15} + \frac{6}{14} = \frac{6}{29}$

a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{4}{14} + \frac{7}{14} = \frac{11}{14} \Rightarrow$ správný výpočet.

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow$ špatný výpočet: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \neq \frac{5}{12}$, sčítáme 2 a 3 stejně velké díly \Rightarrow

získáme pět těchto dílů, jejich velikost se nezmění $\Rightarrow \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{6}{15} + \frac{6}{14} = \frac{6}{29} \Rightarrow$ špatný výpočet:

- $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{6}{15} + \frac{6}{14}$, pokud chceme sčítat potřebujeme stejně velké dílky, ne stejný počet různých dílků,

- $\frac{6}{15} + \frac{6}{14} = \frac{6}{29}$, nestejně velké díly nemůžeme dávat dohromady a už vůbec ne tak, že jejich se jejich počet sečtením nezvětší a dílky se zároveň zmenší.

Správný postup: $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$.

Pedagogická poznámka: Chyby žáci najdou snadno, ale zdůvodnění většinou formulují v číslech (šestky ve jmenovateli se nesmí sčítat) místo ve významech. Proto je společná kontrola nutná.

Př. 2: Vypočti.

a) $\frac{3}{11} + \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{7} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{7}{12} - \frac{2}{15}$

d) $\frac{13}{18} + \frac{5}{24}$

a) $\frac{3}{11} + \frac{2}{3} = \frac{9}{33} + \frac{22}{33} = \frac{31}{33}$

b) $\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{12}{21} - \frac{7}{21} = \frac{5}{21}$

c) $\frac{7}{12} - \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 15}{12 \cdot 15} - \frac{2 \cdot 12}{15 \cdot 12} = \frac{105}{180} - \frac{24}{180} = \frac{81}{180} = \frac{9 \cdot 9}{20 \cdot 9} = \frac{9}{20}$

d) $\frac{13}{18} + \frac{5}{24} = \frac{13 \cdot 24}{18 \cdot 24} + \frac{5 \cdot 18}{24 \cdot 18} = \frac{312}{432} + \frac{90}{432} = \frac{402}{432} = \frac{2 \cdot 201}{2 \cdot 216} = \frac{201}{216} = \frac{3 \cdot 67}{3 \cdot 72} = \frac{67}{72}$

Pedagogická poznámka: Většina žáků v tomto okamžiku nejmenší společný násobek nepoužívá a počítá způsobem použitým v řešení (který je samozřejmě v bodech c)

a b) velmi nešťastný). Půda je připravena, během společné kontroly se určitě objeví někdo, kdo bude mít menší jmenovatel a tím vyvolá diskusi o nejvýhodnějším postupu.

V bodech c) a d) se velmi rychle začínají objevovat velká čísla, která komplikují výpočet. Nešlo by provést sčítání úsporněji? Jaký musí být společný dělitel pro zlomky v bodě

c) $\frac{7}{12} - \frac{2}{15}$?

⇒ Dva požadavky:

- jmenovatel musí být násobkem 12 i 15,
- jmenovatel by měl být co nejmenší.

To jsou požadavky na nejmenší společný násobek ⇒ pokud hledáme nejvýhodnější společný jmenovatel, hledáme nejmenší společný násobek.

Nejmenší společný násobek jsme hledali pomocí prvočíselného rozkladu:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

Nejmenší společný násobek (obsahuje oba prvočíselné rozklady): $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 10 = 60$ ⇒ zlomek s 12 ve jmenovateli musíme rozšířit 5, zlomek s 15 ve jmenovateli musíme rozšířit 4.

$$\frac{7}{12} - \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{35}{60} - \frac{8}{60} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$$

Úplně zadarmo to není, ale je to podstatně jednodušší než před chvílí.

Př. 3: Najdi nejmenší společný násobek pro uvedené dvojice čísel.

- a) 5;15 b) 20;25 c) 12;15 d) 8;12 e) 18;24

a) 5;15 $15 = 5 \cdot 3$

⇒ nejmenší společný násobek: $5 \cdot 3 = 15$

b) 20;25 $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot 5$

⇒ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

c) 12;15 $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 5 \cdot 3$

⇒ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

d) 8;12 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

⇒ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

e) 18;24 $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

⇒ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$

Př. 4: Vypočti.

a) $\frac{13}{18} + \frac{5}{24}$

b) $\frac{11}{15} - \frac{9}{20}$

c) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$

d) $\frac{11}{16} - \frac{7}{12}$

a) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ⇒ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$

Prvočíselný rozklad pomáhá nejen v hledání společného jmenovatele, ale i v určování čísel, kterými musíme rozšiřovat zlomky.

- $\frac{13}{18}$ rozšiřujeme na $\frac{\quad}{72}$, v rozkladu čísla $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ chybí do rozkladu $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ součin $2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow$ rozšiřujeme $\frac{13}{18} = \frac{13 \cdot 4}{18 \cdot 4} = \frac{52}{72}$.
- $\frac{5}{24}$ rozšiřujeme na $\frac{\quad}{72}$, v rozkladu čísla $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ chybí do rozkladu $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ číslo 3 \Rightarrow rozšiřujeme $\frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{15}{72}$.

$$\frac{13}{18} + \frac{5}{24} = \frac{13 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{52}{72} + \frac{15}{72} = \frac{67}{72}$$

b) $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$\frac{11}{15} - \frac{9}{20} = \frac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{44}{60} - \frac{27}{60} = \frac{17}{60}$$

c) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = \frac{23}{24}$$

d) $16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$

$$\frac{11}{16} - \frac{7}{12} = \frac{11 \cdot 3}{16 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{33}{48} - \frac{28}{48} = \frac{5}{48}$$

Pedagogická poznámka: Postup třídy je velmi nerovnoměrný. I když se vše prodiskutuje při kontrole příkladu 2 a žáci si osvěží hledání nejmenšího společného násobku, objeví se jedinci, kteří opět pojedou na násobení jmenovatelů mezi sebou, případně nebudou chápat, čím mají zlomky rozšířit. To už je třeba řešit jednotlivě.

Př. 5: Vypočti.

a) $2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}$ b) $5\frac{1}{7} - 2\frac{1}{3}$ c) $-5\frac{3}{5} - 2\frac{1}{2}$

a) $2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4} = 2 + 3 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 5 + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = 5 + \frac{17}{12} = 6\frac{5}{12}$

b) $5\frac{1}{7} - 2\frac{1}{3} = 5 - 2 + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = 3 + \frac{3}{21} - \frac{7}{21} = 3 - \frac{4}{21} = 2\frac{17}{21}$

c) $-5\frac{3}{5} - 2\frac{1}{2} = -5 - 2 - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = -7 - \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = -7 - \frac{11}{10} = -8\frac{1}{10}$

Pedagogická poznámka: Mnoho žáků řeší předchozí příklad převedením smíšeného čísla na zlomek s velkým čitatelem. Není to principiálně špatně, ale je to nepohodlné a ukazuje to na malou práci se skutečným významem zapsaného čísla.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je povinné domácí procvičování pro žáky, kteří měli v příkladu 4 problémy a nestihli ho v hodině.

Př. 6: Vypočti.

a) $\frac{5}{8} - \frac{5}{12}$

b) $\frac{7}{10} + \frac{2}{15}$

c) $\frac{9}{14} + \frac{4}{21}$

d) $\frac{5}{24} - \frac{3}{28}$

a) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

$$\frac{5}{8} - \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} = \frac{5}{24}$$

b) $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$\frac{7}{10} + \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{21}{30} + \frac{4}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

c) $14 = 2 \cdot 7$, $21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

$$\frac{9}{14} + \frac{4}{21} = \frac{9 \cdot 3}{14 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{21 \cdot 2} = \frac{27}{42} + \frac{8}{42} = \frac{35}{42}$$

d) $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ nejmenší společný násobek: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$\frac{5}{24} - \frac{3}{28} = \frac{5 \cdot 7}{24 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 6}{28 \cdot 6} = \frac{35}{168} - \frac{18}{168} = \frac{17}{168}$$

Shrnutí: Nejvýhodnějším společným jmenovatelem je nejmenší společný násobek obou jmenovatelů.