2.2.20 Převrácená čísla

Předpoklady: 020217

Př. 1: Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru.

a) $\frac{5}{14}\cdot\frac{7}{10}$ b) $\frac{12}{11}\cdot\frac{33}{18}$ c) $\frac{30}{27}\cdot\frac{9}{20}$ d) $\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{16}{33}$

a) $\frac{5}{14}\cdot\frac{7}{10}=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 7\cdot 2\cdot 5}=\frac{1}{4}$ b) $\frac{12}{11}\cdot\frac{33}{18}=\frac{2\cdot 6\cdot 3\cdot 11}{11\cdot 6\cdot 3}=2$

c) $\frac{30}{27}\cdot\frac{9}{20}=\frac{10\cdot 3\cdot 9}{3\cdot 9\cdot 2\cdot 10}=\frac{1}{2}$ d) $\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{16}{33}=\frac{3\cdot 2\cdot 11\cdot 2\cdot 8}{5\cdot 8\cdot 3\cdot 11}=\frac{4}{5}$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci zaváhají v bodě b), kde ve jmenovateli zdánlivě „nic nezbude“. V bodě c) je třeba připomenout, že není vhodné rozkládat na prvočísla, naopak je daleko výhodnější nechat obě desítky vcelku.

Př. 2: Děda s babičkou přivezli svým třem vnoučatům balení s osmnácti čokoládovými bonbóny. Kolik bonbónů dostalo každé z dětí, pokud jim prarodiče bonbóny rozdělili spravedlivě. Hledej více způsobů řešení.

Dvě řešení:

- Prarodiče musí rozdělit bonbóny na tři hromádky: $18:3=6$. (dělili jsme trojkou)
- Každé z vnoučat dostane třetinu bonbónů: $18\cdot\frac{1}{3}=6$. (násobili jsme jednou třetinou)

Každé vnouče dostane 6 bonbónů. (oba postupy vedou ke stejnému výsledku).

Pedagogická poznámka: Častěji se vyskytuje první typ řešení, ale druhý se tak určitě objeví. Oba postupy si napíšeme na tabuli a já se ptám, proč jsme řešili tak jednoduchý příklad.

Postřeh: Dělení trojkou je to samé jako násobení jednou třetinou $\Rightarrow$ pro každé číslo x platí: $x:3=x\cdot\frac{1}{3}$.

Pedagogická poznámka: Snažím se ověřit, zda se všichni uvědomují, že písmenko x zastupuje všechna možná čísla.

Př. 3: Platí pravidlo: $x:3=x\cdot\frac{1}{3}$ i pro jiná čísla? Najdi podobné slovní úlohy.

Platí pro všechna čísla: $x:2=x\cdot\frac{1}{2}$, $x:10=x\cdot\frac{1}{10}$, kromě nuly (tou nemůžeme dělit a nemůžeme ji psát do jmenovatele).
Stačilo by upravit slovní úlohy z příkladu 2: bonbóny byly přivezeny dvěma, čtyřem, pěti, … vnoučatům.

Další zajímavost: $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, vztah platí obecně pro všechna čísla různá od nuly: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Číslo $\frac{1}{3}$ se nazývá číslo převrácené k číslu 3.

Dělit číslem 3 je stejné jako násobit číslem $\frac{1}{3}$. Stejné pravidlo platí pro všechna přirozená čísla.

Př. 4: Co by ještě mělo platit pro dělení? Najdi vhodnou slovní úlohu.

Ještě by mělo platit, že například $x : \frac{1}{2} = x \cdot 2$.

Pedagogická poznámka: S tím, že by se mělo převracet i při dělení zlomkem (zatím s jedničkou v čitateli), určitě někdo přijde, s vymýšlením slovní úlohy je to horší, tam moc dlouho nečekáme a já ukážu zadání následujícího příkladu.

Př. 5: Paní učitelka má 10 m stuhy. Kolik kousků nastřihá, pokud budou mít všechny délku: a) 5 m, b)2 m, c) 1 m, d) $\frac{1}{2}$ m, e) $\frac{1}{3}$ m, f) $\frac{1}{5}$ m, g) $0{,}1$ m, h) $5\,\mathrm{cm}$.
Výsledky zdůvodni.

a) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 5 m
$10 : 5 = 2$ kusy

b) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 2 m
$10 : 2 = 5$ kusů

c) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 1 m
$10 : 1 = 10$ kusů

d) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti $\frac{1}{2}$ m

$10 : \frac{1}{2} = 10 \cdot 2 = 20$ kusů (z každého metru ustřihneme dva kousky)

e) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti $\frac{1}{3}$ m

$10 : \frac{1}{3} = 10 \cdot 3 = 30$ kusů (z každého metru ustřihneme tři kousky)

f) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti $\frac{1}{5}$ m

$10:\frac{1}{5}=10\cdot 5=50$ kusů (z každého metru ustřihneme pět kousků)

g) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti $0{,}1$ m

$10:\frac{1}{10}=10\cdot 10=100$ kusů (z každého metru ustřihneme deset kousků)

h) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti $5\,\mathrm{cm}$

$5\,\mathrm{cm}=0{,}05\,\mathrm{m}=\frac{5}{100}\,\mathrm{m}=\frac{1}{20}\,\mathrm{m}$

$10:\frac{1}{20}=10\cdot 20=200$ kusů (z každého metru ustřihneme dvacet kousků)

Jiné řešení:

$10\text{ m}=1000\text{ cm}$

$1000:5=200$ kusů.

Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem.

Př. 6: Najdi převrácená čísla k uvedeným číslům.

a) 15 b) 1973 c) -3 d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{159}$ f) 1

a) $15 \Rightarrow \frac{1}{15}$ b) $1973 \Rightarrow \frac{1}{1973}$ c) $-3 \Rightarrow -\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{4} \Rightarrow 4$ e) $-\frac{1}{159} \Rightarrow$ -159 f) $1 \Rightarrow 1$

Př. 7: Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Výsledky zdůvodni.

a) $\frac{4}{5}:2$ b) $\frac{7}{3}:5$ c) $3:7$ d) $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$ f) $\frac{3}{5}:\frac{1}{2}$

a) $\frac{4}{5}:2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$ (čtyři pětinové kousky rozděluji na dvě hromady $\Rightarrow$ na obou hromádkách budou dvě pětinové kousky)

b) $\frac{7}{3}:5=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$ (sedm třetinových kousků rozděluji na pět hromádek $\Rightarrow$ každý z nich rozdělím na pět částí $\Rightarrow$ získám 35 patnáctinových částí $\Rightarrow$ na každou z pěti hromádek dám sedm patnáctinových částí)

c) $3:7=3\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ (tři celky rozděluji na sedm hromádek $\Rightarrow$ každý celek rozdělím na sedm sedminových částí, které rozdělím na hromádky $\Rightarrow$ na každé hromádce budou tři sedminové části)

d) $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\cdot 8=\frac{8}{4}=2$ (ze čtvrtiny celku rozděluji na osminy $\Rightarrow$ získám dvě hromádky)

e) $\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot 3=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (šestinu celku máme rozdělit na třetinu celku $\Rightarrow$ z šestiny celku třetinu nepostavíme ani jednu, máme pouze jednu polovinu požadované třetiny)

f) $\frac{3}{5}:\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\cdot 2=\frac{6}{5}$

Př. 8: Shrň, co zajímavého jsme v této hodině objevili. Kdy jsme se v minulosti setkali s něčím podobným?

Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem. S podobnou situací jsme se setkali:

- v kapitole o záporných číslech:
  - opačná čísla: $x-2=x+(-2)$, $x-(-2)=x+2$ (odečítat libovolné číslo je stejné jako přičítat číslo opačné).
- v kapitole o desetinných číslech:
  - násobení jednou desetinou je stejné jako dělení deseti (teď už víme, že kvůli tomu, že desetina je převrácené číslo k deseti),
  - dělení jednou desetinou je stejné jako násobení deseti (teď už víme, že kvůli tomu, že desetina je převrácené číslo k deseti),
  - násobení kladným číslem menším než jedna zmenšuje (protože to je stejné jako dělení převráceným číslem, které je větší než jedna),
  - dělení kladným číslem menším než jedna zvětšuje (protože to je stejná jako násobení převráceným číslem, které je větší než jedna).

Př. 9: Jirka si nechal namoštovat padaná jablka a tak získal 18 litrů moštu. Do kolika nádob ho bude muset rozlít, pokud použije:
a) velké zavařovací sklenice o objemu 3 litry,
b) PET láhve o objemu 2 litry,
c) střední zavařovací sklenice o objemu $\frac{1}{2}$ litru,
d) plastové kelímky o objemu $\frac{1}{4}$ litru,
e) PET láhve o objemu 1,5 litru,
f) klasické zavařovací sklenice o objemu 0,7 litru.

a) velké zavařovací sklenice o objemu 3 litry
$18:3=6$ zavařovacích sklenic o objemu 3 litry.

b) PET láhve o objemu 2 litry

$18:2=9$ PET lahví o objemu 3 litry.

c) střední zavařovací sklenice o objemu $\frac{1}{2}$ litru

$18:\frac{1}{2}=18\cdot 2=36$ středních zavařovacích sklenic o objemu 3 litry.

d) plastové kelímky o objemu $\frac{1}{4}$ litru

$18:\frac{1}{4}=18\cdot 4=72$ plastových kelímků o objemu $\frac{1}{4}$ litru.

e) PET láhve o objemu 1,5 litru ($\frac{3}{2}$ litru)

$18:\frac{3}{2}=18\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 6\cdot 2}{3}=12$ PET lahví o objemu 1,5 litru.

f) klasické zavařovací sklenice o objemu 0,7 litru ($\frac{7}{10}$ litru)

$18:\frac{7}{10}=18\cdot\frac{10}{7}=\frac{180}{7}=25\frac{5}{7}$ klasických zavařovacích sklenic o objemu 0,7 litru.

Př. 10: Novákovy mají dvě děti. Výška syna je $\frac{2}{3}$ výšky táty, výška dcery je $\frac{2}{3}$ výšky mámy, výška táty je $\frac{20}{19}$ výšky mámy a táta se synem dají dohromady 3 m. Kolik měří každý člen rodiny?

Výška táty a syna: $1+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$ .... $3\,\text{m}=300\,\text{cm}$.

$\frac{1}{3}$ ... $300:5\,\text{cm}=60\,\text{cm}$

Táta $\frac{3}{3}$ ... $3\cdot 60\,\text{cm}=180\,\text{cm}$

Syn $\frac{2}{3}$ ... $2\cdot 60\,\text{cm}=120\,\text{cm}$

Táta 180 cm ... $\frac{20}{19}\Rightarrow\frac{1}{19}$ ... $180:20\,\text{cm}=9\,\text{cm}$

Máma $\frac{19}{19}$ ... $19\cdot 9\,\text{cm}=171\,\text{cm}$

Máma 171 cm ... $\frac{3}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}$ ... $171:3\,\text{cm}=57\,\text{cm}$

Dcera $\frac{2}{3}$ ... $2\cdot 57\,\text{cm}=114\,\text{cm}$

Táta měří 180 cm, máma 171 cm, syn 120 cm a dcera 114 cm.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je na domácí procvičení.

Př. 11: Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Výsledky zdůvodni.

a) $\frac{3}{7}:6$ b) $\frac{8}{15}:4$ c) $12:18$ d) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ e) $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$ f) $\frac{5}{3}:\frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{7}:6=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{14}$

b) $\frac{8}{15}:4=\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{2}{15}$

c) $12:18=\frac{12}{18}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 6}=\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 2}=\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$

f) $\frac{5}{3}:\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\cdot 3=5$

Shrnutí: Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem.