

## 2.2.20 Převrácená čísla

**Předpoklady:** 020217

**Př. 1:** Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru.

a)  $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{10}$

b)  $\frac{12}{11} \cdot \frac{33}{18}$

c)  $\frac{30}{27} \cdot \frac{9}{20}$

d)  $\frac{6}{5} \cdot \frac{11}{8} \cdot \frac{16}{33}$

a)  $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{1}{4}$

b)  $\frac{12}{11} \cdot \frac{33}{18} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11}{11 \cdot 6 \cdot 3} = 2$

c)  $\frac{30}{27} \cdot \frac{9}{20} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 9}{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10} = \frac{1}{2}$

d)  $\frac{6}{5} \cdot \frac{11}{8} \cdot \frac{16}{33} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 8}{5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{4}{5}$

**Pedagogická poznámka:** Někteří žáci zaváhají v bodě b), kde ve jmenovateli zdánlivě „nic nezbude“. V bodě c) je třeba připomenout, že není vhodné rozkládat na prvočísla, naopak je daleko výhodnější nechat obě desítky vcelku.

**Př. 2:** Děda s babičkou přivezli svým třem vnoučatům balení s osmnácti čokoládovými bonbóny. Kolik bonbónů dostalo každé z dětí, pokud jim prarodiče bonbóny rozdělili spravedlivě. Hledej více způsobů řešení.

Dvě řešení:

- Prarodiče musí rozdělit bonbóny na tři hromádky:  $18 : 3 = 6$ . (dělili jsme trojkou)
- Každé z vnoučat dostane třetinu bonbónů:  $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ . (násobili jsme jednou třetinou)

Každé vnouče dostane 6 bonbónů. (oba postupy vedou ke stejnému výsledku).

**Pedagogická poznámka:** Častěji se vyskytuje první typ řešení, ale druhý se tak určitě objeví. Oba postupy si napíšeme na tabuli a já se ptám, proč jsme řešili tak jednoduchý příklad.

Postřeh: Dělení trojkou je to samé jako násobení jednou třetinou  $\Rightarrow$  pro každé číslo  $x$  platí:

$$x : 3 = x \cdot \frac{1}{3}.$$

**Pedagogická poznámka:** Snažím se ověřit, zda se všichni uvědomují, že písmenko  $x$  zastupuje všechna možná čísla.

**Př. 3:** Platí pravidlo:  $x : 3 = x \cdot \frac{1}{3}$  i pro jiná čísla? Najdi podobné slovní úlohy.

Platí pro všechna čísla:  $x : 2 = x \cdot \frac{1}{2}$ ,  $x : 10 = x \cdot \frac{1}{10}$ , kromě nuly (tou nemůžeme dělit a nemůžeme ji psát do jmenovatele).

Stačilo by upravit slovní úlohy z příkladu 2: bonbóny byly přivezeny dvěma, čtyřem, pěti, ... vnoučatům.

Další zajímavost:  $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ , vztah platí obecně pro všechna čísla různá od nuly:  $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ .

Číslo  $\frac{1}{3}$  se nazývá číslo převrácené k číslu 3.

**Dělit číslem 3 je stejné jako násobit číslem  $\frac{1}{3}$ . Stejně pravidlo platí pro všechna přirozená čísla.**

**Př. 4:** Co by ještě mělo platit pro dělení? Najdi vhodnou slovní úlohu.

Ještě by mělo platit, že například  $x : \frac{1}{2} = x \cdot 2$ .

**Pedagogická poznámka:** S tím, že by se mělo převracet i při dělení zlomkem (zatím s jedničkou v čitateli), určitě někdo přijde, s vymyšlením slovní úlohy je to horší, tam moc dlouho nečekáme a já ukážu zadání následujícího příkladu.

**Př. 5:** Paní učitelka má 10 m stuhy. Kolik kousků nastříhá, pokud budou mít všechny délku: a) 5 m, b) 2 m, c) 1 m, d)  $\frac{1}{2}$  m, e)  $\frac{1}{3}$  m,

f)  $\frac{1}{5}$  m, g) 0,1 m, h) 5 cm.

Výsledky zdůvodni.

a) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 5 m  
 $10 : 5 = 2$  kusy

b) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 2 m  
 $10 : 2 = 5$  kusů

c) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti 1 m  
 $10 : 1 = 10$  kusů

d) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti  $\frac{1}{2}$  m  
 $10 : \frac{1}{2} = 10 \cdot 2 = 20$  kusů (z každého metru ustříhneme dva kousky)

e) 10 metrů stuhy na kousky o velikosti  $\frac{1}{3}$  m  
 $10 : \frac{1}{3} = 10 \cdot 3 = 30$  kusů (z každého metru ustříhneme tři kousky)

f) 10 metrů stuhly na kousky o velikosti  $\frac{1}{5}$  m

$$10 : \frac{1}{5} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ kusů (z každého metru ustříhneme pět kousků)}$$

g) 10 metrů stuhly na kousky o velikosti 0,1 m

$$10 : \frac{1}{10} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ kusů (z každého metru ustříhneme deset kousků)}$$

h) 10 metrů stuhly na kousky o velikosti 5 cm

$$5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} = \frac{5}{100} \text{ m} = \frac{1}{20} \text{ m}$$

$$10 : \frac{1}{20} = 10 \cdot 20 = 200 \text{ kusů (z každého metru ustříhneme dvacet kousků)}$$

Jiné řešení:

$$10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$$

$$1000 : 5 = 200 \text{ kusů.}$$

**Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem.**

**Př. 6:** Najdi převrácená čísla k uvedeným číslům.

a) 15      b) 1973      c) -3      d)  $\frac{1}{4}$       e)  $-\frac{1}{159}$       f) 1

a)  $15 \Rightarrow \frac{1}{15}$       b)  $1973 \Rightarrow \frac{1}{1973}$       c)  $-3 \Rightarrow -\frac{1}{3}$

d)  $\frac{1}{4} \Rightarrow 4$       e)  $-\frac{1}{159} \Rightarrow -159$       f)  $1 \Rightarrow 1$

**Př. 7:** Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Výsledky zdůvodni.

a)  $\frac{4}{5} : 2$       b)  $\frac{7}{3} : 5$       c)  $3 : 7$       d)  $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$       e)  $\frac{1}{6} : \frac{1}{3}$       f)  $\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$

a)  $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$  (čtyři pětínové kousky rozdělují na dvě hromady  $\Rightarrow$  na obou hromádkách budou dvě pětínové kousky)

b)  $\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$  (sedm třetinových kousků rozdělují na pět hromádek  $\Rightarrow$  každý z nich rozdělím na pět částí  $\Rightarrow$  získám 35 patnáctinových částí  $\Rightarrow$  na každou z pěti hromádek dám sedm patnáctinových částí)

c)  $3:7 = 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$  (tři celky rozdělují na sedm hromádek  $\Rightarrow$  každý celek rozdělím na sedm sedminových částí, které rozdělím na hromádky  $\Rightarrow$  na každé hromádce budou tři sedminové části)

d)  $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{8}{4} = 2$  (ze čtvrtiny celku rozdělují na osminy  $\Rightarrow$  získám dvě hromádky)

e)  $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  (šestinu celku máme rozdělit na třetinu celku  $\Rightarrow$  z šestiny celku třetinu nepostavíme ani jednu, máme pouze jednu polovinu požadované třetiny)

f)  $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$

**Př. 8:** Shrň, co zajímavého jsme v této hodině objevili. Kdy jsme se v minulosti setkali s něčím podobným?

Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem. S podobnou situací jsme se setkali:

- v kapitole o záporných číslech:
  - opačná čísla:  $x - 2 = x + (-2)$ ,  $x - (-2) = x + 2$  (odečítat libovolné číslo je stejné jako přičítat číslo opačné).
- v kapitole o desetinných číslech:
  - násobení jednou desetinou je stejné jako dělení deseti (teď už víme, že kvůli tomu, že desetina je převrácené číslo k deseti),
  - dělení jednou desetinou je stejné jako násobení deseti (teď už víme, že kvůli tomu, že desetina je převrácené číslo k deseti),
  - násobení kladným číslem menším než jedna zmenšuje (protože to je stejné jako dělení převráceným číslem, které je větší než jedna),
  - dělení kladným číslem menším než jedna zvětšuje (protože to je stejná jako násobení převráceným číslem, které je větší než jedna).

**Př. 9:** Jirka si nechal namoštovat padaná jablka a tak získal 18 litrů moštu. Do kolika nádob ho bude muset rozlít, pokud použije:

a) velké zavařovací sklenice o objemu 3 litry,

b) PET láhve o objemu 2 litry,

c) střední zavařovací sklenice o objemu  $\frac{1}{2}$  litru,

d) plastové kelímky o objemu  $\frac{1}{4}$  litru,

e) PET láhve o objemu 1,5 litru,

f) klasické zavařovací sklenice o objemu 0,7 litru.

a) velké zavařovací sklenice o objemu 3 litry

$18:3 = 6$  zavařovacích sklenic o objemu 3 litry.

b) PET láhve o objemu 2 litry

18 : 2 = 9 PET lahví o objemu 3 litry.

c) střední zavařovací sklenice o objemu  $\frac{1}{2}$  litru

18 :  $\frac{1}{2}$  = 18 · 2 = 36 středních zavařovacích sklenic o objemu 3 litry.

d) plastové kelímky o objemu  $\frac{1}{4}$  litru

18 :  $\frac{1}{4}$  = 18 · 4 = 72 plastových kelímků o objemu  $\frac{1}{4}$  litru.

e) PET láhve o objemu 1,5 litru ( $\frac{3}{2}$  litru)

18 :  $\frac{3}{2}$  = 18 ·  $\frac{2}{3}$  =  $\frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{3}$  = 12 PET lahví o objemu 1,5 litru.

f) klasické zavařovací sklenice o objemu 0,7 litru ( $\frac{7}{10}$  litru)

18 :  $\frac{7}{10}$  = 18 ·  $\frac{10}{7}$  =  $\frac{180}{7}$  = 25  $\frac{5}{7}$  klasických zavařovacích sklenic o objemu 0,7 litru.

**Př. 10:** Novákoví mají dvě děti. Výška syna je  $\frac{2}{3}$  výšky táty, výška dcery je  $\frac{2}{3}$  výšky mámy, výška táty je  $\frac{20}{19}$  výšky mámy a táta se synem dají dohromady 3 m. Kolik měří každý člen rodiny?

Výška táty a syna:  $1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$  .... 3 m = 300 cm .

$\frac{1}{3}$  ... 300 : 5 cm = 60 cm

Táta  $\frac{3}{3}$  ... 3 · 60 cm = 180 cm

Syn  $\frac{2}{3}$  ... 2 · 60 cm = 120 cm

Táta 180 cm ...  $\frac{20}{19} \Rightarrow \frac{1}{19}$  ... 180 : 20 cm = 9 cm

Máma  $\frac{19}{19}$  ... 19 · 9 cm = 171 cm

Máma 171 cm ...  $\frac{3}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}$  ... 171 : 3 cm = 57 cm

Dcera  $\frac{2}{3}$  ... 2 · 57 cm = 114 cm

Táta měří 180 cm, máma 171 cm, syn 120 cm a dcera 114 cm.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad je na domácí procvičení.

**Př. 11:** Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Výsledky zdůvodni.

a)  $\frac{3}{7}:6$       b)  $\frac{8}{15}:4$       c)  $12:18$       d)  $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$       e)  $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$       f)  $\frac{5}{3}:\frac{1}{3}$

a)  $\frac{3}{7}:6 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{14}$

b)  $\frac{8}{15}:4 = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{2}{15}$

c)  $12:18 = \frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{2}{3}$

d)  $\frac{2}{3}:\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$

e)  $\frac{1}{4}:\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

f)  $\frac{5}{3}:\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$

**Shrnutí:** Dělení libovolným nenulovým číslem můžeme převést na násobení jeho převráceným číslem.