

2.2.28 Zase zlomky

Předpoklady: 020226

Př. 1: Vypočti.

$$\text{a) } \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{15}} \quad \text{b) } \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{6}}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{\frac{8}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{6}{6} + \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{11}{6}} = \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 11} = \frac{15}{22}$$

Př. 2: Myš má krk tvořený sedmi obratlí. Délka krku myši je rovna $\frac{1}{30}$ délky krku žirafy. Kolik obratlů tvoří krk žirafy?

Matematický výpočet:

$$\frac{1}{30} \quad \dots \quad 7 \text{ obratlů}$$

$$\frac{30}{30} \quad \dots \quad 7 \cdot 30 = 210 \text{ obratlů, což je však zjevně nesmyslný výsledek. Počet obratlů není}$$

úměrný délce krku, ve skutečnosti má žirafa 8 krčních obratlů.

Příklad není možné správně spočítat, protože má nesmyslné zadání.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad jsem objevil na dumy.cz. Nebyla u něj žádná poznámka o tom, že je schválně špatně. Minimálně někteří žáci by se však měli poznat, že jde o nesmysl, protože počet obratlů není svázán s délkou krku (žirafa má podle posledních výzkumů osm krčních obratlů). Žáci se snažili situaci zachránit tím, že by správným výsledkem mohlo být, že žirafí krk tvoří 210 myších krčních obratlů, což je samozřejmě také nesmysl, žirafa nemá myši, ale žirafí obratle. Předchozí příklad je sice možné spočítat, ale rozhodně není možné získat správný výsledek, protože jde o naprostý nesmysl. Mimochodem, zjevně nesprávný je i poměr $\frac{1}{30}$, myší krk je těžko delší než 2 cm, žirafí pak se určitě blíží 2 m.

Př. 3: Jirka měl jedenáct třetinkových lahví limonády. Do kolika sklenic o objemu 0,2 l je může rozlít?

$$\text{Množství limonády: } 11 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \text{ litru.}$$

$$\text{Objem jedné sklenice: } 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ litru.}$$

$$\text{Počet lahví: } \frac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{11}{3} : \frac{1}{5} = \frac{11}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{55}{3} = 18\frac{1}{3}.$$

Jirka může limonádu rozlít do 18 sklenic a ještě mu zbude třetina litru.

Pedagogická poznámka: Žákům, kteří si s předchozím příkladem nevědí rady, doporučuji vymyslet podobný příklad s přirozenými čísly (například: Jirka měl 15 litrů limonády, do kolika dvou litrových lahví ji mohl rozlít?).

Pedagogická poznámka: Sleduji, kolik žáků si všimne, že jde o řešení posledního příkladu předminulé hodiny.

Př. 4: Vývoj nových léků je velmi drahou a časově náročnou záležitostí. Z přibližně 7500 zkoumaných látek se pouze 15 dostane do stádia preklinického testování (testy na zvířatech, ...). Pouze polovina preklinicky testovaných látek je připuštěna ke klinickému testování na nemocných pacientech. Pouze každá pátá klinicky testovaná látka je schválena k použití. Jaká část zkoumaných látek se dostane do stádia preklinického testování? Jaká část klinicky testovaných látek je schválena k použití? Jaká část zkoumaných látek je schválena k použití? Kolik látek je třeba začít zkoumat, aby bylo možné nakonec připravit jeden schválený lék?

Zkoumané látky 7500, do preklinického testování 15 \Rightarrow do stádia preklinického testování se dostane $\frac{15}{7500} = \frac{15}{75} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{500}$.

Každá pátá klinicky testovaná je schválena \Rightarrow schválena je $\frac{1}{5}$ klinicky testovaných látek.

Zkoumané látky $\Rightarrow \frac{1}{500}$ je preklinicky testována, z nich $\frac{1}{2}$ je klinicky testována, z nich $\frac{1}{5}$ schválena k použití \Rightarrow ze zkoumaných látek je schváleno k použití $\frac{1}{500} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5000}$ látek.

Je třeba začít zkoumat 5000 látek, aby byla rozumná pravděpodobnost, že se podaří vyvinout jeden schválený lék.

Pedagogická poznámka: Při hodině se snažím vysvětlit, že jde o průměrná čísla, která mohou být v konkrétním případě větší i menší.

Př. 5: Tři pětiny účastníků školního přeboru v Tetrisu již dokončily první úroveň (a tak postoupili do druhé), devítina z nich pak i druhou. Na druhé úrovni se tak trápí 24 soutěžících. Kolik má přebor účastníků? Jaká část z původního počtu jich je v tomto okamžiku na třetí úrovni? Kolik hráčů úspěšně zvládlo druhou úroveň?

První zvládlo ... $\frac{3}{5}$

Druhou zvládlo ... $\frac{1}{9}$ z $\frac{3}{5}$: $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$ (jsou na třetí úrovni)

Nyní na druhé úrovni: $\frac{3}{5} - \frac{1}{15} = \frac{9}{15} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$... 24

$\frac{1}{15}$... $24 : 8 = 3$

$\frac{15}{15}$... $15 \cdot 3 = 45$ účastníků.

Druhou zvládlo $\frac{1}{15}$ ze 45: $\frac{1}{15} \cdot 45 = 3$

Přebor má 45 účastníků, na třetí úrovni v tomto okamžiku hraje $\frac{1}{15}$ účastníků, což jsou tři hráči.

Dodatek: Příklad je možné spočítat i z počtu účastníků na druhé úrovni. Na druhé úrovni je nyní $\frac{8}{9}$ z těch, kteří postoupili z první úrovně 24 účastníků \Rightarrow

$\frac{1}{9}$... $24 : 8 = 3$

$\frac{9}{9}$... $3 \cdot 9 = 27$

Všichni účastníci: $27 : \frac{3}{5} = \frac{27}{1} \cdot \frac{5}{3} = 45$.

Př. 6: Třetina studentů v ročníku jsou kluci. Z nich se tři čtvrtiny přihlásily do školního kurzu na řidičský průkaz. Z dívek se přihlásilo pouze pět osmin, takže kurz navštěvovalo jen o deset dívek víc než kluků. Kolik studentů chodí do kurzu? Kolik jich chodí do ročníku.

Kluci na kurzu: tři čtvrtiny ze třetiny: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ze všech studentů.

Dívky na kurzu: pět osmi ze dvou třetin: $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{5}{12}$ ze všech studentů.

Dívek je více než kluků o $\frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{6}$... 10 studentů

$\frac{6}{6}$... $6 \cdot 10 = 60$ studentů

Do kurzu chodí: $\frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{3+5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ všech studentů.

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \text{ studentů.}$$

Do kurzů chodí 40 studentů, do ročníku 60.

Př. 7: Převed' smíšená čísla na zlomky a zlomky na smíšená čísla.

a) $2\frac{1}{3}$

b) $2\frac{1}{4}$

c) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{11}{4}$

a) $2\frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

b) $2\frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

c) $\frac{11}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$

d) $\frac{11}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$

Př. 8: Vypočti.

a) $1\frac{3}{7} + 2\frac{4}{7}$

b) $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}$

c) $3\frac{3}{4} - 2\frac{3}{5}$

d) $2\frac{3}{8} - 1\frac{7}{12}$

a) $1\frac{3}{7} + 2\frac{4}{7} = 1 + 2 + \frac{3+4}{7} = 3 + \frac{7}{7} = 4$

b) $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} = 3 + 1 + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 4 + \frac{5}{6} = 4\frac{5}{6}$

c) $3\frac{3}{4} - 2\frac{3}{5} = 3 - 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = 1 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 1 + \frac{15-12}{20} = 1\frac{3}{20}$

d) $2\frac{3}{8} - 1\frac{7}{12} = 2 - 1 + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = 1 + \frac{9-14}{24} = 1 - \frac{5}{24} = \frac{24-5}{24} = \frac{19}{24}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit podobně jako je řešena většina bodů v následujícím příkladu - převedením smíšeného čísla na zlomky a výpočtem ve formě zlomků: $1\frac{3}{7} + 2\frac{4}{7} = \frac{10}{7} + \frac{18}{7} = \frac{28}{7} = 4$.

Př. 9: Vypočti.

a) $2 \cdot 3\frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{4} \cdot 4\frac{2}{3}$

c) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$

d) $3\frac{3}{4} : 1\frac{4}{11}$

a) $2 \cdot 3\frac{5}{8} = 2 \cdot \left(3 + \frac{5}{8}\right) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{5}{8} = 6 + \frac{5}{4} = 7\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

c) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

d) $3\frac{3}{4} : 1\frac{4}{11} = \frac{15}{4} : \frac{15}{11} = \frac{15}{4} \cdot \frac{11}{15} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo spočte bod c) takto:

$$1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2\frac{1}{6}$$

chybu opravíme, ale dál zatím neřešíme.

Dodatek: Zdroj pro příklad 3: MUDr. Martin Votava PhD Vývoj nového léčiva 2. LF UK Praha.

Shrnutí: